

# UM MODELO NÃO-LINEAR PARA ANÁLISE DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA DE DUTOS SUBTERRÂNEOS POR MEIO DE ELEMENTOS DE PÓRTICO

Waldir Terra Pinto<sup>1</sup>, Paulo R. Dias Pinheiro<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Materiais e Construção – FURG, Rio Grande, RS – w.pinto@furg.br*

<sup>2</sup>*Mestrando do Curso de Engenharia Oceânica – FURG, Rio Grande, RS*

## RESUMO:

Este trabalho apresenta um modelo numérico baseado no método dos elementos finitos capaz de lidar com as altas não-linearidades da interação solo-estrutura de dutos subterrâneos. O modelo utiliza elementos de pórtico não-lineares e considera também a não-linearidade do carregamento. A utilização de elementos de pórtico, ao contrário, de elementos de viga permite a análise de dutos em qualquer tipo de terreno, pois os dutos podem assumir qualquer posição, inclusive a vertical. A curva de reação do solo é obtida através de outro modelo não-linear que foi desenvolvido especificamente para este fim, usando o modelo constitutivo hiperbólico para o solo. Os resultados mostram a capacidade do modelo em lidar com as não-linearidades e na detecção de instabilidades do duto.

## PALAVRAS-CHAVE:

**Dutos enterrados, interação solo-estrutura**

## 1. INTRODUÇÃO

A maneira mais efetiva de proteger uma linha de dutos contra a ação de carregamentos ambientais e da ação de terceiros consiste em enterrar o duto a uma profundidade segura. A determinação da integridade estrutural da linha envolve a análise de vários modos de falha tais como a ruptura e a estabilidade da seção transversal, estabilidade vertical da linha, análises de tensões e deformações longitudinais, flambagem vertical e lateral da linha. A análise da seção transversal serve para definir a espessura da parede capaz de suportar a pressão interna e a pressão externa sem a ocorrência de deformações plásticas ou de excesso de ovalização da seção transversal. Quando a pressão externa for muito maior do que a pressão interna pode ocorrer o colapso da seção transversal. Na prática se determina a pressão crítica que leva à instabilidade inicial por meio de uma análise linear da estrutura e adota-se um fator de segurança para que essa carga jamais seja atingida durante a vida útil da linha. A estabilidade vertical da linha de dutos se refere à propriedade pela qual a linha não deve se movimentar excessivamente na direção vertical tanto para cima quanto para baixo. A movimentação da linha pode ocorrer em dutos submersos para os quais a força de empuxo é maior do que a resistência do solo, enquanto que os movimentos excessivos para baixo podem ocorrer pela ruptura do solo de fundação. As análises de tensões e deformações longitudinais referem-se ao cálculo das tensões de flexão, de torção e tensões axiais que podem ocorrer devido à formação de vãos e ações de terceiros. Finalmente, os problemas de flambagem vertical e lateral da linha podem ter origem na presença de imperfeições

iniciais, variações de temperatura e pressão, pouca profundidade de enterramento, existência de taludes, entre outras. Na realidade, esse é um modo de falha começou a ser estudado mais recentemente [3], apesar de representar um sério risco à integridade da linha.

Os trabalhos referenciados anteriormente adotam a formulação baseada na teoria de viga-coluna para o estudo da flambagem vertical. Entretanto, a linha pode apresentar uma geometria com inclinações variáveis, como mostra a Figura 1, para a qual a aplicação da teoria de viga fica prejudicada em função das forças internas não serem paralelas. Neste caso, o mais indicado é a utilização de uma técnica que consiste na divisão da linha em segmentos finitos os quais devem ser tratados como membros de pórticos. A análise da linha como estrutura reticulada não representa um aumento significativo no grau de dificuldade para a resolução do problema. A maior dificuldade está na determinação da interação da estrutura com o solo, pois esse é um problema altamente não-linear tanto do ponto de vista físico quanto do ponto de vista geométrico. Em geral, linhas de dutos são estruturas bastante longas de modo que a energia potencial de deformação de cisalhamento é muito menor do que a energia de deformação da flexão e do esforço normal, de modo que a adoção da teoria de viga de Euler-Bernoulli é plausível. Um outro fator importante refere-se à magnitude das deformações. Por serem estruturas longas as linhas de dutos podem experimentar grandes deslocamentos sem sofrer grandes deformações. Na análise da interação com o solo, o acoplamento entre o domínio da estrutura e o domínio do solo ocorre em função do deslocamento da linha. A influência da deformação da estrutura pode ser desprezada na maioria dos casos. Em função do exposto, é usual a adoção de um modelo constitutivo linear para a estrutura e um modelo constitutivo não-linear para o solo. A não-linearidade do elemento de pórtico está relacionada com o acoplamento do efeito do esforço normal no estudo da flexão.

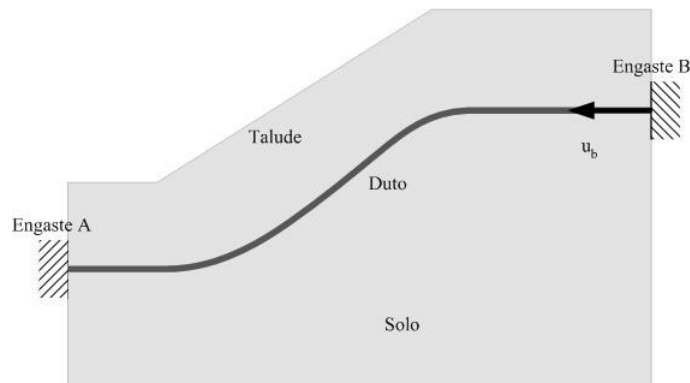


Figura 1 – Esquema de uma tubulação em talude.

Neste contexto, esse trabalho apresenta uma formulação baseada no método dos elementos finitos na qual a linha de dutos é dividida em elementos de pórtico. As equações de equilíbrio do elemento são transformadas em equações integrais por meio da aplicação do método dos resíduos ponderados, cuja ponderação é feita através do método de Galerkin [4]. O método de Galerkin utiliza como funções de ponderação as mesmas funções de interpolação dos deslocamentos, que no presente caso consiste em funções lineares para aproximação do deslocamento longitudinal e polinômios do terceiro grau para a aproximação dos deslocamentos transversais. Um resumo da formulação é apresentado na próxima seção deste trabalho. A função de acoplamento entre o solo e a estrutura consiste de uma curva da carga por unidade de comprimento versus deslocamento vertical da estrutura que segue o modelo hiperbólico de

Duncan [2]. Detalhes do modelo são apresentados na terceira seção deste trabalho. A quarta seção do trabalho apresenta a metodologia para a resolução do sistema de equações algébricas não-lineares para determinação dos deslocamentos. A quinta seção apresenta uma aplicação do método na simulação dos deslocamentos de uma linha de duto numa encosta. O modelo numérico apresentado aqui foi concebido de forma modular, de maneira que a incorporação de outros carregamentos e outras não-linearidades possa ser feita sem maiores dificuldades. A sexta seção apresenta as principais conclusões do trabalho.

## 2. MODELO NUMÉRICO PARA A ESTRUTURA

O modelo numérico para a linha de dutos é formulado a partir das equações de diferenciais de equilíbrio para um elemento infinitesimal de pórtico como mostrado na Figura 2. As equações são obtidas a partir das hipóteses da teoria de viga de Euler-Bernoulli, segundo as quais as equações diferenciais de equilíbrio do elemento para as direções tangencial e normal podem ser escritas como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q_t(x, u, v) = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \left( EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - q_n(x, u, v) = 0 \quad (1b)$$

onde  $EA$  é a rigidez axial,  $q_t$  é função que define a carga por unidade de comprimento na direção tangencial,  $EI$  é a rigidez à flexão da estrutura,  $q_n$  é a função que define a carga transversal por unidade de comprimento,  $u$  é o deslocamento na direção axial e  $v$  é o deslocamento transversal. Esses deslocamentos podem ser aproximados pela seguinte expressão vetorial:

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = \Phi \mathbf{u} \quad (2)$$

onde  $\Phi$  é a matriz das funções de forma definidas como:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & 1(\xi-2\xi^2+\xi^3) & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & 1(-\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde  $\xi = x/l$ ,  $l$  sendo o comprimento do elemento de pórtico mostrado na Figura 3. O vetor  $\mathbf{u}$  corresponde aos valores dos deslocamentos nas extremidades do elemento (valores nodais). De acordo com a Figura 2, a expressão para o vetor  $\mathbf{u}$  transposto é:

$$\mathbf{u} = [u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j]^T \quad (4)$$

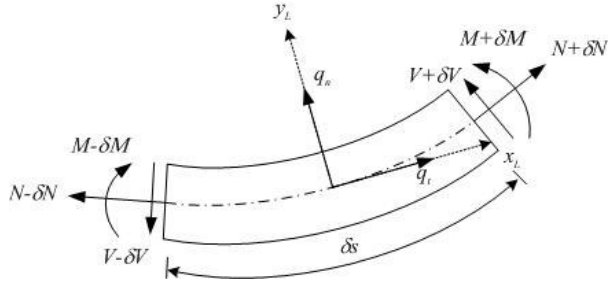


Figura 2 – Elemento infinitesimal de pórtico

As equações diferenciais de equilíbrio podem ser transformadas em equações integrais através do método dos resíduos ponderados cuja idéia é a seguinte: (i) a substituição dos valores aproximados dos deslocamentos nas Equações 1 produz um resíduo, isto é, neste caso as Equações 1 não são iguais a zero; (ii) o resíduo é então minimizado por meio da integração do produto das equações diferenciais e de funções de ponderação; (iii) as equações integrais são transformadas num sistema de equações algébricas, cuja solução fornece os valores nodais dos deslocamentos. As variações das diversas formulações do método dos resíduos ponderados ocorrem através da escolha das funções de ponderação. Uma das variações mais populares é o chamado método de Galerkin, que adota as próprias funções de interpolação [4] como funções de ponderação. Usando essa metodologia, chega-se ao seguinte sistema de equações integrais:

$$\int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q_t(x, u, v) \right] \phi_{1i} dx = 0 \quad (5a)$$

$$\int_0^1 \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \left( EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - q_n(x, u, v) \right] \phi_{2i} dx = 0 \quad (5b)$$

O requerimento de continuidade das funções de interpolação pode ser reduzido através da integração por partes das Equações 5. Note-se que sem essa integração por partes as funções de interpolação (Equação 3) não poderiam representar os deslocamentos, pois existem derivadas de segunda ordem para o deslocamento axial e de quarta ordem para o deslocamento normal. O resultado da integração por partes é:

$$\left( \int_0^1 EA \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial x} \frac{\partial \phi_{1j}}{\partial x} dx \right) u_j - \int_0^1 q_t(x, u, v) \phi_{1i} dx = \left[ EA \frac{\partial u}{\partial x} \phi_{1i} \right]_0^1 \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 EI \frac{\partial^2 \phi_{2i}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_{2j}}{\partial x^2} dx u_j + \int_0^1 EA \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial x} \frac{\partial \phi_{2j}}{\partial x} dx u_j - \int_0^1 q_n(x, u, v) \phi_{2i} dx = \\ \int_0^1 \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \phi_{2i} - V \phi_{2i} + M \frac{\partial \phi_{2i}}{\partial x} \right]_0^1 \end{aligned} \quad (6b)$$

Os termos do lado direito do sinal de igual nas Equações 6 representam as condições de contorno do elemento. Já as parcelas do lado direito da Equação 6a representam a rigidez axial e o carregamento tangencial, enquanto que as parcelas do lado direito da Equação 6b representam,

respectivamente, a rigidez à flexão, o efeito de segunda ordem do esforço axial na flexão e o carregamento transversal por unidade de comprimento. Nota-se, que nas Equações 6 não foi feita nenhuma restrição quanto à não-linearidade das equações constitutivas, exceto aquelas inerente à teoria de viga de Euler-Bernoulli.

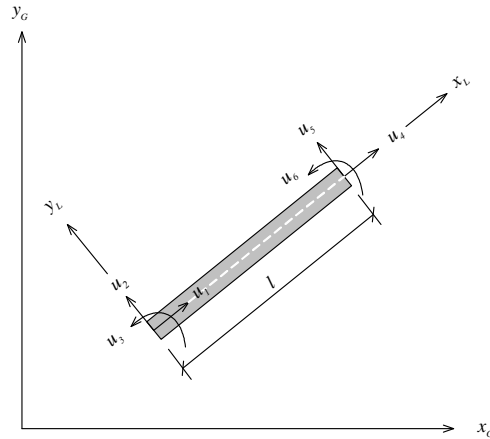


Figura 3 – Elemento finito de pórtico

### 3. FUNÇÃO DE ACOPLAMENTO DA INTERAÇÃO SOLO ESTRUTURA

A maior dificuldade da análise estrutural da linha de dutos está no estabelecimento de uma função de transferência de carga que estime o carregamento do solo sobre a estrutura em função do deslocamento e das deformações da mesma. Essa função deve ser representativa do comportamento do solo e da alta não-linearidade do problema. Neste trabalho adota-se uma função hiperbólica para definir o comportamento da carga por unidade de comprimento versus o deslocamento transversal da estrutura. De acordo com essa abordagem, a carga transversal pode ser expressa como:

$$q_n = \frac{v}{a + bv} \quad (7)$$

Os parâmetros  $a$  e  $b$  podem ser determinados por meio de ensaios ou por meio de uma análise numérica do problema de distribuição de tensões e/ou deformações num maciço terroso. Essa análise deve ser conduzida com a utilização de um modelo constitutivo hiperbólico de Duncan. A elegância deste modelo está no fato de que os parâmetros  $a$  e  $b$  não são apenas coeficientes estatísticos de regressão uma vez que cada um deles possui significado físico. O significado físico do parâmetro  $a$  pode ser determinado através da derivada da Equação 7 em relação ao deslocamento vertical. Ou seja, essa derivada é o equivalente do módulo tangente de reação do solo e pode ser expressa como:

$$\frac{\partial q_n}{\partial v} = \frac{a}{(a + bv)^2} \quad (8)$$

Observa-se que à medida que  $v \rightarrow 0$ , a derivada tende para  $1/a$ , o que significa que o parâmetro  $a$  é o inverso do módulo tangente inicial de reação do solo. Por outro lado, o

significado físico do parâmetro  $b$  pode ser obtido mediante o cálculo do limite da carga transversal quando o deslocamento tende para o infinito, ou seja, a carga última. Isto pode ser expresso como:

$$q_u = \lim_{v \rightarrow \infty} q_n = \frac{v}{a + bv} = \frac{1}{b} \quad (9)$$

Então o parâmetro  $b$  é o inverso da carga última do solo. Estas características tornam o modelo hiperbólico bastante atraente para as formulações de elementos finitos.

A análise apresentada neste trabalho utiliza os valores de 0.0076 e 0.714 para os parâmetros  $a$  e  $b$ , respectivamente, o que dá origem à curva apresentada na Figura 4.

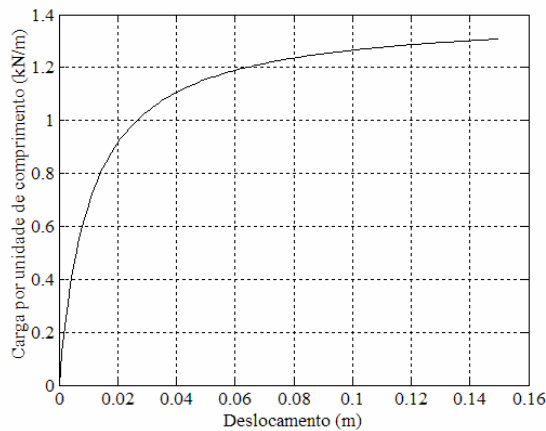


Figura 4 – Curva carga distribuída versus deslocamento para o modelo hiperbólico

#### 4. PROCEDIMENTO PARA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

A partir das discussões feitas anteriormente neste trabalho, pode-se afirmar que o equilíbrio estático do elemento de pórtico depende de quatro forças. Essas forças são devidas à rigidez estrutural, à rigidez geométrica, ao carregamento externo distribuído ao longo do elemento e às condições de contorno obtidas a partir da imposição de deslocamentos nodais ou da especificação de forças nodais. Nestas condições, pode-se escrever a condição de equilíbrio estático para o elemento como:

$$\mathbf{f}^L = \mathbf{f}_E^L + \mathbf{f}_G^L + \mathbf{f}_q^L + \mathbf{f}_c^L = \mathbf{0} \quad (10)$$

onde  $\mathbf{f}$  é um vetor de 6 posições, os subscritos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{c}$  correspondem, respectivamente, às forças devido à rigidez estrutural, à rigidez geométrica, ao carregamento externo e às cargas nodais. O superescrito  $L$  indica que as componentes do vetor de forças  $\mathbf{f}$  estão expressas no sistema de coordenadas local.

As forças atuantes num elemento são obtidas a partir do cálculo das integrais expressas nas Equações 6. No caso geral de problemas não-lineares essas integrais são avaliadas numericamente que, neste trabalho é feita pelo método da quadratura de Gauss com três pontos de integração [1]. A soma da contribuição de cada elemento é feita de acordo com a conectividade e a definição dos graus de liberdade da estrutura. No caso de elementos de pórtico,

antes de somar as contribuições dos elementos é necessário determinar as componentes das forças nodais nas direções das coordenadas globais mediante a aplicação da matriz de rotação:

$$\mathbf{f}_i^L = \mathbf{R} \mathbf{f}_i^G \quad (11)$$

A matriz de rotação  $\mathbf{R}$  é expressa em função do ângulo de inclinação do elemento (Figura 3) como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ onde } \varphi = \begin{matrix} \text{ângulo de inclinação} \\ \text{do elemento} \end{matrix} \quad (12)$$

O vetor de força nodal forma um sistema de equações algébricas não-lineares tendo como ordem o número total de graus de liberdade da estrutura. Isto é:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}^G) = \sum_{el=1}^{nel} \mathbf{f}_{el}^G(\mathbf{u}^G) - \mathbf{P}^G = \mathbf{0} \quad (13)$$

A solução do sistema de equações não-lineares pode ser obtida de forma aproximada através do método de Newton-Raphson, cuja fórmula de recorrência é:

$${}^{k+1}\mathbf{u}^G = {}^k\mathbf{u}^G - ({}^k\mathbf{H}^G)^{-1} ({}^k\mathbf{F}^G) \quad (14)$$

onde o superescrito  $k$  representa o número da iteração e  $\mathbf{H}$  é a matriz Jacobiana do sistema de equações não-lineares cujos elementos são calculados a partir de expressão:

$$H_{ij}^G = \frac{\partial F_i^G}{\partial u_j^G} \quad (15)$$

## 5. APLICAÇÃO E ANÁLISE

No sentido de demonstrar a habilidade do programa em lidar com as não linearidades decorrentes dos grandes deslocamentos, o programa considera o caso de uma linha de dutos numa encosta, como mostra a Figura 1 e cuja malha de elementos finitos é apresentada na Figura 5. A diferença de nível é de 20 metros (altura) e a distância horizontal é de 32 metros aproximadamente. A seção transversal do duto é circular com diâmetro externo de 355,6 mm e diâmetro interno de 344,4 mm de aço com módulo de elasticidade inicial de  $2.1 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>. Os parâmetros  $a$  e  $b$  do solo são os correspondentes aos apresentados no gráfico mostrado na Figura 4. O problema das grandes deformações ocorrem quando por qualquer motivo surge um esforço de compressão. Este esforço pode ter origem num aumento na temperatura ou na pressão da linha. Esses esforços podem ser representado através da imposição de um deslocamento

O deslocamento horizontal de 60 mm foi aplicado no apoio da direita enquanto todos os outros graus de liberdade dos apoios tiveram deslocamento nulo. O deslocamento foi aplicado em 5 incrementos com atualização da malha no início de cada incremento de deslocamento. Os resultados são mostrados na Figura 6. Observa-se que os deslocamentos na parte curva superior foram bem maiores do que na parte curva inferior, embora tenha-se considerado que a curva do

solo era homogênea. Na realidade o mais comum é que o solo seja mais rígido para o afundamento do que para o movimento ascendente. De qualquer forma, os dois objetivos da análise foram demonstrar a habilidade do programa em lidar com as não linearidades e mostrar o potencial para instabilidade da estrutura. Essas características do programa ficam demonstradas na Figura 6.

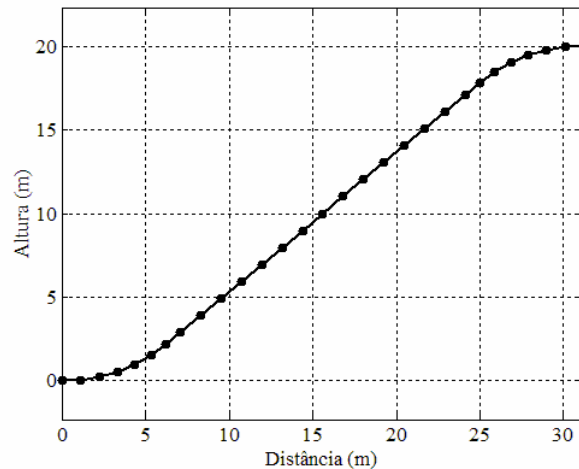


Figura 5 – Malha de elementos finitos para o duto na encosta

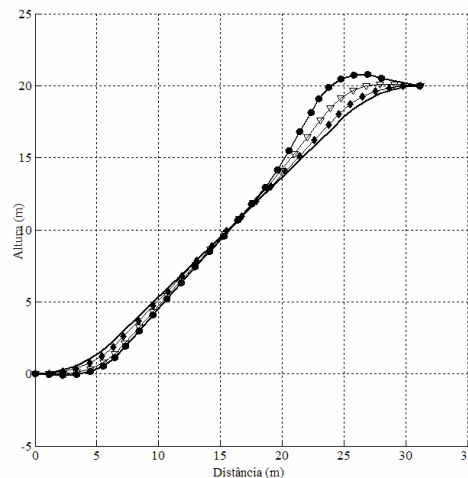


Figura 6 – Deformadas para deslocamentos horizontais impostos no apoio da direita:  
(- indeformado, losango-u=20 mm; triângulo – u=40 mm; círculo – u=60 mm)

## 6. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma formulação de elementos finitos para a análise de linhas de dutos com inclinações acentuadas para a qual foram usados elementos de pórtico. A utilização de elementos de pórtico é mais vantajoso para lidar com linearidades sobretudo em linhas com geometria mais complexas. O modelo proposto pode identificar problemas de instabilidades. A estrutura modular do programa permite a incorporação de outras não-linearidades, esforços, carregamentos, assim como o acoplamento com outros programas para a análise do solo, o que é importante no caso de solos estratificados. Chama-se a atenção que um programa deste tipo



constitui-se numa ferramenta fundamental para reduzir, ou pelo menos otimizar, a necessidade da realização de ensaios de campo, os quais podem apresentar custo elevado.

## **7. REFERÊNCIAS**

1. Bathe, K-J, Finite Element Procedures in Engineering Analysis. New Jersey: Prentice-Hall, 1982.
2. Duncan, J.M e Chang, C.Y. Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils. JSMFD, ASCE, vol. 96, 1970.
3. Pedersen, P.T. e Michelsen, J. Large Deflection Upheaval Buckling of Marine Pipelines, BOSS, pp. 965-979, 1988.
4. Zienkiewicz, O.C e Taylor, R.L., The Finite Element Method. Fourth Edition, Vol. 1. UK: McGraw, 1991.