

Um critério para a avaliação da formação de laços em umbilicais submarinos

Waldir Terra Pinto¹

¹ Departamento de Materiais e Construções – FURG, Rio Grande, RS – waldir.pinto@gmail.com

RESUMO:

O uso de cabos e umbilicais submersos para transmissão de sinais e potência é intenso no contexto de engenharia oceânica. Cabos e umbilicais são estruturas que apresentam alta flexibilidade e, em geral, estão sujeitas a esforços trativos pequenos. Essa combinação faz com que a capacidade da estrutura de resistir cargas transversais seja muito pequena, o que torna a estrutura susceptível a instabilidades locais do tipo de formação de laço. Neste contexto, esse trabalho apresenta um estudo analítico que visa a estabelecimento de um critério de estabilidade para estruturas submarinas esbeltas de baixa tração baseada no método proposto por Witz e Tan. Os resultados mostram que a curvatura crítica é, freqüentemente, inferior a máxima curvatura recomendada pelo fabricante do umbilical.

PALAVRAS-CHAVE:

Laços, umbilicais submarinos

1 – INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, a indústria de petróleo no Brasil tem seguido uma tendência de exploração de hidrocarbonetos no mar em águas cada vez mais profundas. Este fato tem levado uma mudança de plataformas fixas para plataformas flutuantes (FPU), notadamente os sistemas semi-submersíveis e FPSO. A utilização destas plataformas flutuantes requer sistemas submarinos conectando instalações de topo com instalações de fundo para transporte de massa, transmissão de força e transmissão de sinais. Neste contexto, os umbilicais são componentes importantes das instalações submarinas e são utilizados para a transmissão de sinais elétricos e pneumáticos e potência para as instalações de fundo.

Um aspecto importante destas estruturas diz respeito a sua instalação no mar. Como são estruturas submarinas esbeltas, os umbilicais precisam ser manipulados com cuidado quando estão sendo instalados, especialmente em águas profundas. Um modo de falha comum em umbilicais submarinos consiste na formação de laços como resultado dos esforços de instalação e/ou operação. Esses laços podem causar deformações plásticas na estrutura tornando o seu reparo extremamente caro ou até impossível. Portanto, a minimização do potencial para a formação de laços é um altamente desejável do ponto de vista do operador.

O objetivo deste trabalho é apresentar um critério para avaliar a possibilidade de formação de laços em umbilicais submarinos durante as operações de instalação. A formação de laços está normalmente associada com condições de baixa tração na estrutura que podem ocorrer de maneira transiente. Baixa tração em umbilicais é inevitável em regiões próximas ao fundo do mar com a agravante de que, nestas regiões, a curvatura da estrutura é alta. Sob condições de baixa tração, a tração estática e a tração dinâmica podem apresentar a mesma ordem de grandeza. Além

disso, a rigidez geométrica da estrutura é baixa. Conseqüentemente, essas estruturas podem sofrer deslocamentos de grandes amplitudes ainda que os esforços hidrodinâmicos sejam pequenos. Uma outra característica dos umbilicais é o potencial para instabilidades que podem levar a grandes deslocamentos tridimensionais, formação de laços, e “kinking” [2,7,8].

O comportamento estrutural dos umbilicais é complexo pois eles exibem resposta de torção quando submetidos a carregamentos axiais. Este fato é consequência das armaduras em forma de hélice, da não-linearidade da relação momento curvatura e do acoplamento entre flexão, torção e esforço axial. Este comportamento estrutural tem sido alvo de inúmeras pesquisas [1,4,5,7,8].

A formação de laços é um problema extremamente complexo tanto do ponto de vista estrutural quanto do ponto de vista da análise dinâmica global. Por essa razão, a alternativa é estimar a possibilidade de ocorrência de laços para situações nas quais a relação constitutiva é linear, para condições de contorno bem comportadas e para carregamentos simples, determinar os casos críticos para formação de laço nestas condições e adotar um coeficiente de segurança alto para que as instabilidades não ocorram. Note-se que as condições críticas de carregamento são obtidas através da análise dinâmica global da estrutura. Existem alguns modelos numéricos que fazem essa tarefa [6].

O trabalho apresenta primeiramente uma discussão de um modelo analítico proposto por Witz e Tan [7], suas condições de contorno, comportamento pós-flambagem e apresenta um critério para a formação de laços em estruturas sujeitas a momentos terminais.

2 - DESCRIÇÃO DO MODELO DE WITZ E TAN

Na investigação da formação de laços apresentada neste trabalho considera que os umbilicais submarinos podem ser idealizados como estruturas cilíndricas longas, com seção transversal circular. A estrutura é considerada elástica-linear, porém com rigidez axial muito grande de maneira que a mesma pode ser considerada inextensível. O carregamento sobre a estrutura consiste de momentos terminais conforme mostra a Figura 1. O equilíbrio de momentos de acordo com a teoria de viga de Euler–Bernoulli pode ser expresso por:

$$\boxed{\hspace{10em}} \tag{1}$$

onde EI é a rigidez à flexão, κ é a curvatura, M_0 é o momento fletor terminal, M_t é o módulo do momento torsor numa posição cuja tangente à linha elástica é paralela ao vetor unitário e_t , M_{t0} é módulo do momento torsor terminal onde o vetor unitário tangente à linha elástica é e_{t0} . As definições recém apresentadas deixam claro que o momento torsor e o momento fletor são ortogonais e que as incógnitas do problema se resumem à curvatura e ao momento torsor.

A determinação dessas incógnitas é feita a partir da hipótese de que a linha elástica pode ser representada por uma curva de velocidade unitária, ou seja, uma curva cuja forma paramétrica utiliza o comprimento de arco S como parâmetro. Como resultado, o vetor tangente unitário à linha elástica é fornecido por:

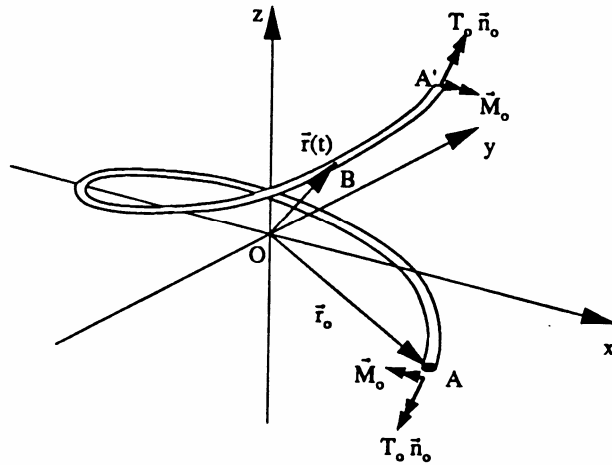


Figura 1 :Esquema de um Elemento do Umbilical

$$\mathbf{e}_t = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}' \quad (2)$$

A derivada do produto escalar deste vetor tangente por ele mesmo é; produz:

$$\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 1 \Rightarrow \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = 0 \quad (3)$$

Ou seja, o vetor \mathbf{r}'' é normal ao vetor \mathbf{r}' . Isto significa que o vetor normal unitário pode ser definido como:

$$\mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{r}''}{\kappa} \quad (4)$$

onde κ é o módulo do vetor curvatura.

Um terceiro vetor pode ser obtido via o produto vetorial entre o vetor tangente unitário e vetor normal unitário. Esse vetor é também unitário e perpendicular aos dois primeiros e é chamado de vetor binormal.

$$\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n \quad (5)$$

O comprimento de arco S pode ser substituído por um parâmetro arbitrário t sem perda de generalidade na formulação. O vetor curvatura pode ser expresso em função do novo parâmetro t através dos passos descritos a seguir. Primeiramente, a derivada do vetor posição em relação a t pode ser escrita como:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{S}\mathbf{r}' = \dot{S}\mathbf{e}_t \quad (6)$$

onde o ponto significa derivada em relação à t . Nota-se que o vetor \mathbf{e}_t é unitário e, portanto, o módulo da derivada (6) é:

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \dot{S} \quad (7)$$

A seguir, calcula-se a segunda derivada da posição em relação a t , isto é:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{S}\mathbf{e}_t + \dot{S}^2\kappa\mathbf{e}_n \quad (8)$$

Assim como o produto vetorial da primeira derivada pela segunda derivada do vetor posição em relação à t .

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \dot{S}\ddot{S}(\mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_t) + \dot{S}^3\kappa(\mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n) = \dot{S}^3\kappa\mathbf{e}_b \quad (9)$$

Como resultado o vetor curvatura pode ser escrito como:

$$\kappa = \kappa\mathbf{e}_b = \frac{(\dot{Y}\ddot{Z} - \dot{Z}\ddot{Y})\mathbf{i} + (\dot{X}\ddot{Z} - \dot{Z}\ddot{X})\mathbf{j} + (\dot{X}\ddot{Y} - \dot{Y}\ddot{X})\mathbf{k}}{(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (10)$$

As coordenadas X , Y e Z e o comprimento de arco S podem ser tornadas adimensionais pelas relações.

$$x = \frac{X}{L} \quad y = \frac{Y}{L} \quad z = \frac{Z}{L} \quad s = \frac{S}{L}$$

Como resultado, o vetor curvatura fica:

$$\kappa = \frac{1}{L} \frac{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})\mathbf{i} + (\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x})\mathbf{j} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\mathbf{k}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (11)$$

De maneira similar à equação de equilíbrio (1) pode ser adimensionalizada a partir da multiplicação pelo comprimento da viga e dividida pela rigidez à flexão, ou seja.

$$L\kappa + \mu_0 + \tau\mathbf{e}_t + \tau_0\mathbf{e}_{t0} = \mathbf{0} \quad (12)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \mu_x\mathbf{i} + \mu_y\mathbf{j} + \mu_z\mathbf{k} = \frac{M_{0x}L}{EI}\mathbf{i} + \frac{M_{0y}L}{EI}\mathbf{j} + \frac{M_{0z}L}{EI}\mathbf{k}, \\ \tau_0\mathbf{e}_t &= \tau_{0x}\mathbf{i} + \tau_{0y}\mathbf{j} + \tau_{0z}\mathbf{k} = \frac{M_{t0x}t_{0x}L}{EI}\mathbf{i} + \frac{M_{t0y}t_{0y}L}{EI}\mathbf{j} + \frac{M_{t0z}t_{0z}L}{EI}\mathbf{k} \end{aligned}$$

e

M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} são os componentes do momento fletor aplicado.

Sem perda de generalidade, a coordenada z é escolhida como sendo o parâmetro t . Conseqüentemente, a Equação 12 pode ser decomposta nas direções x , y e z o que resulta nas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{-\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} + \tau(z) \frac{\dot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + m_x &= 0 \\ \frac{\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} + \tau(z) \frac{\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} &= 0 \\ \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} + \tau(z) \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + m_z &= 0 \end{aligned} \quad (13, a, b, c)$$

onde:

$$\mathbf{m} = m_x \mathbf{i} + m_y \mathbf{j} + m_z \mathbf{k} = (\mu_x + \tau_{0x} t_{0x}) \mathbf{i} + (\mu_y + \tau_{0y} t_{0y}) \mathbf{j} + (\mu_z + \tau_{0z} t_{0z}) \mathbf{k}$$

Note-se que o momento transversal m_y foi considerado nulo na Equação 13. Isto se justifica pelo fato de escolha da orientação do sistema de coordenadas de tal forma que a resultante do momento fletor e do momento torsos aplicados esteja no plano principal xz .

As Equações 13 podem ser transformadas nas seguintes formas diferenciais exatas.

$$\begin{aligned} \frac{-\ddot{x} - \dot{y}^2 \ddot{x} + \dot{x}\ddot{y}\dot{y}}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} + \frac{m_z \dot{y}}{|\dot{\mathbf{r}}|} &= \frac{d}{dz} \left[\frac{\dot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + m_z y \right] = 0 \\ \frac{\ddot{y} + \dot{x}^2 \ddot{y} - \dot{x}\ddot{x}\dot{y}}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} + \frac{m_z \dot{x} - m_x \dot{z}}{|\dot{\mathbf{r}}|} &= \frac{d}{dz} \left[\frac{\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + m_z x - m_x z \right] = 0 \\ \frac{-(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} + \frac{m_x \dot{y}}{|\dot{\mathbf{r}}|} &= \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + m_x y \right] = 0 \end{aligned} \quad (14, a, b, c)$$

A integração das Equações 14 leva às seguintes expressões:

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + m_z y &= C_2 \\ \frac{\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + m_z x - m_x z &= C_3 \\ \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + m_x y &= C_1 \end{aligned} \quad (15, a, b, c)$$

onde C_1 , C_2 e C_3 são constantes de integração a determinar.

Antes de resolver as Equações 15, considere-se a substituição do parâmetro z pelo comprimento de arco adimensional s . Aplicando-se a regra da cadeia chega-se a seguinte expressão:

$$\dot{x} = x'\dot{s} \quad \dot{y} = y'\dot{s} \quad |\dot{\mathbf{r}}| = \dot{s} \quad (16, a, b, c)$$

Substituindo a Equação 16 na Equação 15 chega-se a:

$$\begin{aligned} x' - m_z y &= C_2 \\ y' + m_z x - m_x z &= C_3 \\ z' + m_x y &= C_1 \end{aligned} \quad (17, a, b, c)$$

A escolha do sistema de coordenadas que force ao momento m_y ser nulo implica em:

$$\begin{aligned} x(-s) &= -x(s) \\ y(-s) &= y(s) \\ z(-s) &= -z(s) \end{aligned} \quad (18, a, b, c)$$

Isto é, as coordenadas x e z são funções ímpares enquanto que a coordenada y é uma função par do comprimento de arco s . Este resultado é consequência das propriedades de simetria e anti-simetria da configuração deformada da viga sujeita aos momentos terminais. Em função destas propriedades, apenas metade da viga precisa ser analisada. Pode-se mostrar facilmente que a constante de integração C_3 tem que ser zero. Como resultado, a derivada da Equação 17b em relação ao comprimento de arco é:

$$y'' + m_z x' - m_x z' = 0 \quad (19)$$

As derivadas das coordenadas x e z podem ser substituídas pelas suas respectivas expressões (17) resultando em:

$$y'' + (m_x^2 + m_z^2) y = C_1 m_x - C_2 m_z \quad (20)$$

cuja solução é:

$$y(s) = C_4 \sin(\omega s) + C_5 \cos(\omega s) + \frac{C_1 m_x - C_2 m_z}{\omega^2} \quad (21 a)$$

onde $\omega^2 = m_x^2 + m_z^2$

As expressões para $x(s)$ e $z(s)$ são obtidas pela substituição da Equação 21 nas Equações 17 seguida da integração em relação ao comprimento de arco s . Portanto:

$$x(s) = \frac{-m_z C_4}{\omega} \cos(\omega s) + \frac{m_z C_5}{\omega} \sin(\omega s) + C_2 s + m_z \frac{m_x C_2 - m_z C_1}{\omega^2} s + C_6 \quad (21 \text{ b})$$

$$z(s) = \frac{m_x C_4}{\omega} \cos(\omega s) - \frac{m_x C_5}{\omega} \sin(\omega s) + C_1 s + m_x \frac{m_z C_2 - m_x C_1}{\omega^2} s + C_7 \quad (21 \text{ c})$$

onde C_6 e C_7 são constantes de integração.

As constantes C_4 , C_6 e C_7 são nulas para satisfazer a Equação 18. Conseqüentemente a solução geral do problema é:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{m_z C_5}{\omega} \sin(\omega s) + C_2 s \\ y(s) &= C_5 \cos(\omega s) \\ z(s) &= -\frac{m_x C_5}{\omega} \sin(\omega s) + C_1 s \end{aligned} \quad (22)$$

onde as constantes C_1 e C_2 possuem a seguinte relação:

$$m_z C_2 - m_x C_1 = 0 \quad (23)$$

A Equação 23 define a posição do eixo y , o que não causa qualquer perda de generalidade da solução. A configuração da viga é obtida a partir da aplicação das condições de contorno na solução geral.

3 – CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno consideradas neste trabalho correspondem as que podem levar a formação de laço. Nestas condições, as restrições terminais da viga são tais que os vetores unitários nas extremidades são paralelos ao plano principal yz e são constantes. Os extremos da viga podem se deslocar livremente. As expressões paramétricas para essas condições de contorno são:

$$\begin{aligned} x' \left(\frac{1}{2} \right) &= 0 \\ y' \left(\frac{1}{2} \right) &= t_{0y} \\ z' \left(\frac{1}{2} \right) &= t_{0z} \end{aligned} \quad (24)$$

Como conseqüência da Equação 18 apenas metade da viga precisa ser considerada. As Equações 23 indicam que, as direções das duas extremidades permanecem constantes à medida que a estrutura forma um laço. A substituição das Equações 22 nas Equações 24 resulta em:

$$\begin{aligned}
m_z C_5 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2 &= 0 \\
C_5 \omega \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) &= t_{oy} \\
-m_x C_5 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_1 &= t_{oz}
\end{aligned} \tag{25}$$

As constantes de integração podem ser expressas em termos dos momentos aplicados, onde se explora a condição de ortogonalidade entre o momento fletor e o momento torsor. Então a seguinte relação é válida:

$$C_1 m_z + C_2 m_x = \tau_0 \tag{26}$$

Usando as Equações 23 e 26, chega-se as seguintes expressões para as constantes C_1 e C_2 .

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{m_z \tau_0}{\omega^2} \\
C_2 &= \frac{m_x \tau_0}{\omega^2}
\end{aligned} \tag{27}$$

A partir da Equação 25, pode-se escrever que a constante C_5 .

$$C_5 = \frac{\mu_0}{\omega^2} \tag{28}$$

O parâmetro ω pode ser escrito em função dos módulos dos momentos terminais:

$$\omega^2 = \mu_0^2 + \tau_0^2 \tag{29}$$

A combinação das Equações 25, 27 e 28 leva a expressão das condições de contorno em termos dos momentos atuantes nas extremidades e dos módulos dos momentos fletor e tensor.

$$\begin{aligned}
\frac{m_z \mu_0}{\omega^2} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{m_x \tau_0}{\omega^2} &= 0 \\
\frac{\mu_0}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) &= t_{oy} \\
-\frac{m_x \mu_0}{\omega^2} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{m_z \tau_0}{\omega^2} &= t_{oz}
\end{aligned} \tag{30}$$

Usando a Equação 30, as componentes do momento fletor atuante podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
\mu_x &= -\frac{\omega^2 \mu_0 \cos(\omega/2) t_{0z}}{\tau_0^2 + \mu_0^2 \cos^2(\omega/2)} \\
\mu_y &= -\frac{\mu_0 \tau_0}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
\mu_z &= \frac{\tau_0 \mu_0 \sin^2(\omega/2) t_{0z}}{\tau_0^2 + \mu_0^2 \cos^2(\omega/2)}
\end{aligned} \tag{31a,b,c}$$

onde:

$$t_{0z}^2 = \frac{1}{\omega^2} \left[\tau_0^2 + \mu_0^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \right] \tag{32}$$

e a componente do momento fletor μ_y é obtida diretamente da Equação 30b a partir da imposição de um valor nulo m_y .

A configuração deformada da viga pode agora ser expressa em termos do módulo do momento fletor e do módulo do momento torsor e a componente do vetor t_{0z} . A expressão é:

$$\begin{aligned}
x(s) &= \frac{\tau_0 \mu_0 t_{0z}}{\tau_0^2 + \mu_0^2 \cos^2(\omega/2)} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega s) - \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) s \right] \\
y(s) &= \frac{\mu_0}{\omega^2} \cos(\omega s) \\
z(s) &= \frac{t_{0z}}{\tau_0^2 + \mu_0^2 \cos^2(\omega/2)} \left[\frac{\mu_0^2 \cos(\omega/2)}{\omega} \sin(\omega s) + \tau_0^2 s \right]
\end{aligned} \tag{33}$$

Claramente, a configuração deformada da viga pode ser completamente determinada desde que o módulo do momento torsor atuante, τ_0 , e uma das componentes do vetor unitário, (t_{0x} ou t_{0z}) sejam conhecidas, pois o módulo do momento fletor atuante pode ser obtido por (30 b).

4 - COMPORTAMENTO PÓS-FLAMBAGEM

O comportamento pós-flambagem é determinado com base na relação entre o momento torsor aplicado e perturbações sofridas pela configuração. As instabilidades decorrentes desta relação são investigadas a luz da teoria da bifurcação. A partir da solução apresentada na seção anterior, é possível estabelecer uma função que relaciona o momento torsor atuante com o deslocamento perturbativo sofrido pela configuração da estrutura tanto no comportamento durante a flambagem quanto para o comportamento pós-flambagem, para condições de contorno especificadas.

O ponto de partida para análise é uma viga perfeitamente reta, isto é, sem curvatura. Se tal viga é submetida à aplicação de momentos terminais, sua configuração retilínea torna-se instável quando o momento torsor aplicado atinge um determinado valor crítico. De acordo com as

condições de contorno discutidas na seção anterior, as extremidades da viga mantêm as suas orientações longitudinais durante o deslocamento, ou, seja, $t_{0x} = t_{0y} = 0$ e $t_{0z} = 1$. A perturbação neste caso é o deslocamento causado pelo momento fletor na extremidade da viga. Como o problema é tridimensional, o deslocamento deve ser descrito por sua magnitude e sua direção. Se a viga é perturbada de forma anti-simétrica por um vetor curvatura $\boldsymbol{\kappa}_0$ nas duas extremidades, então:

$$\boldsymbol{\kappa}_0 = \boldsymbol{\mu}_0 \quad (34)$$

Como demonstrado anteriormente, a configuração deformada é completamente e unicamente determinada a partir da Equação 31 considerando a Equação 34, pode-se concluir que o conhecimento ao módulo da perturbação é suficiente para a determinação completa da configuração deformada. Conseqüentemente, a viga pode ser considerada um sistema de grau de liberdade sendo que a Equação 30b fornece a relação entre o momento torsor atuante e o deslocamento para o comportamento durante a flambagem e a pós-flambagem. A Equação 30b se reduz a forma (35) desde que t_{0y} :

$$\sqrt{\tau_0^2 + \kappa_0^2} = 2\pi k \quad k = 1, 2, \dots \quad (35)$$

onde $\kappa_0 = |\boldsymbol{\kappa}_0|$ é o módulo do vetor curvatura.

A Equação 35 fornece a solução exata para descrição do comportamento durante a flambagem e a pós-flambagem para uma viga com configuração inicial perfeitamente retilínea, o momento torsor crítico corresponde ao menor autovalor, ou seja $k = 1$.

Na prática da engenharia submarina a existência de uma curvatura inicial é inevitável especialmente para estruturas altamente flexíveis. A presença de uma curvatura inicial reduz de maneira significativa o momento torsor crítico. Para uma instalação típica de umbilical pode ser descrita por uma configuração em forma de catenária, com valores altos de curvatura para uma região próxima ao fundo do mar. Como conseqüência desta curvatura inicial estruturas submarinas esbeltas podem facilmente formar um laço. A seção da estrutura que forma um laço será referenciada como a seção característica, sendo que a estrutura foi idealizada como um longo cilindro circular elástico. As implicações da curvatura inicial e do comprimento característico do cabo serão discutidas nas próximas seções.

Se não houver momento torsor ao longo da viga a configuração da mesma é plana. As orientações dos extremos são obtidas a partir das Equações 30, ou seja:

$$\begin{aligned} t_{0x} &= 0 \\ t_{0y} &= \sin\left(\frac{\kappa_{i0}}{2}\right) \\ t_{0z} &= \cos\left(\frac{\kappa_{i0}}{2}\right) \end{aligned} \quad (36)$$

onde κ_{i0} é a curvatura média ao longo o comprimento característico da viga A configuração corresponde a um arco circular definido pela Equação 33.

Se um momento torsor é aplicado, a viga apresenta uma configuração tridimensional. Neste caso a expressão para a flambagem e a pós-flambagem é dada pela forma completa da Equação 30b, que pode ser escrita como:

$$\sqrt{\tau_0^2 + \kappa_0^2} t_{0,y} = \kappa_0 \sin\left(\frac{\sqrt{\tau_0^2 + \kappa_0^2}}{2}\right) \quad (37)$$

A componente do vetor $t_{0,y}$ pode ser encarada como uma imperfeição. A bifurcação fornecida pela Equação 37 é mostrada na Figura 2. Observa-se que até um valor de curvatura inicial crítico em aumento no deslocamento causa um aumento no momento torsor, portanto a configuração é estável. Entretanto, após um valor crítico κ_0 um aumento no deslocamento provoca uma diminuição no momento torsor, ou seja, a estrutura é instável. Assim, a carga correspondente de flambagem é dada pelo ponto limite da bifurcação.

A perda de estabilidade deste tipo de bifurcação é chamada de “snap buckling”. Após a ocorrência da flambagem a viga assume uma nova configuração de equilíbrio, uma vez que o momento torsor se reduz a zero e a curvatura correspondente torna-se $2(\pi - \kappa_{i0})$. Essa nova configuração corresponde a um laço.

A relação entre o momento torsor crítico e a curvatura inicial pode ser obtida através do ponto máximo da curva. Esse ponto é calculado através da condição de máximo, isto é, resolvendo $d\tau_0/d\kappa_0 = 0$ chega-se a:

$$2\tau_{cr}^2 t_{0,y} + \kappa_{cr}^3 \cos\left(\frac{\sqrt{\tau_{cr}^2 + \kappa_{cr}^2}}{2}\right) = 0 \quad (38)$$

A solução do sistema de equações formado por 37 e 38 corresponde a esses pontos críticos.

5 – CRITÉRIO DE FORMAÇÃO DE LAÇO

Os três problemas principais da formação de laço em umbilicais submarinos são (i) se o umbilical pode formar um laço, (ii) no evento da formação de laço a curvatura resultante é maior que a curvatura máxima permitida é (iii). Quando o umbilical for tracionado novamente o laço se desfaz ou não. A obtenção da resposta à terceira pergunta não é tarefa fácil e está além do escopo deste trabalho. As respostas para as duas primeiras questões podem ser obtidas mediante a análise do comportamento do momento torsor em função da curvatura e da imperfeição inicial $t_{0,y}$.

Para responder a primeira questão usa-se o ponto de máximo das curvas mostradas na Figura 2, onde as diferentes curvas são obtidas para diferentes valores de $t_{0,y}$. Como visto anteriormente, esses valores máximos correspondem aos momentos críticos, que na sua forma dimensional pode ser escrito como:

$$\tau_{cr} = \frac{GJ}{EI} L\phi_{cr} \quad (39)$$

onde GJ é a rigidez à torção, EI é a rigidez à flexão; L é o comprimento característico e ϕ é o ângulo de torção por unidade de comprimento. Como consequência, três parâmetros governam a estabilidade da viga: (i) relação entre a rigidez à torção e a rigidez à flexão, o comprimento característico e o ângulo de torção crítico. Para uma estrutura for um cilindro longo de circular e homogênea é constituído de um material elástico linear, o momento torsor crítico pode ser calculado pela fórmula:

$$\tau_{cr} = \frac{L\phi_{cr}}{1+\nu} \quad (40)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

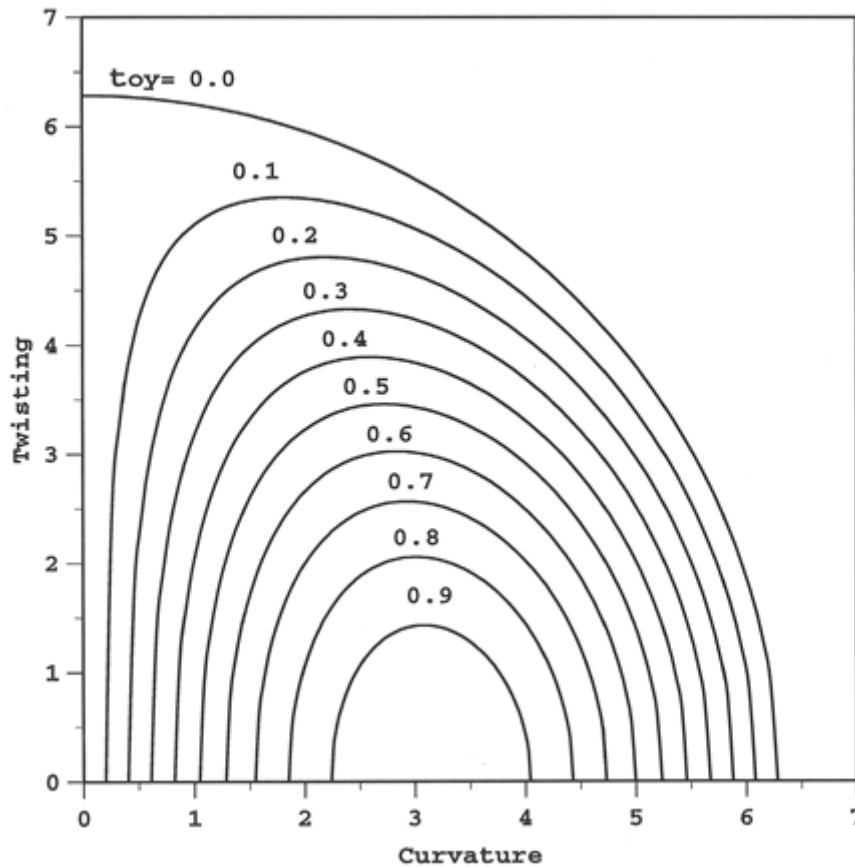


Figura 2 – Gráfico para determinação do Momento Torsor Crítico em função da Curvatura Inicial

Para determinar se a integridade estrutural do umbilical é afetada no evento da formação de um laço considera-se a curvatura do laço, que pode ser obtida a partir da Figura 2. Se essa curvatura for maior do que a curvatura máxima admissível pelo fabricante da estrutura então a integridade da estrutura foi violada.

Em resumo, tem-se a seguinte seqüência: (i) – Se o momento torsor crítico for atingido a estrutura forma o laço. Se o laço possui um raio de curvatura inferior e o raio de curvatura mínimo recomendado pelo fabricante então a estrutura sofreu dano. Em caso contrário deve-se estudar uma maneira de desfazer o laço sem que esse raio mínimo seja atingido, de forma que a estrutura não sofra danos.

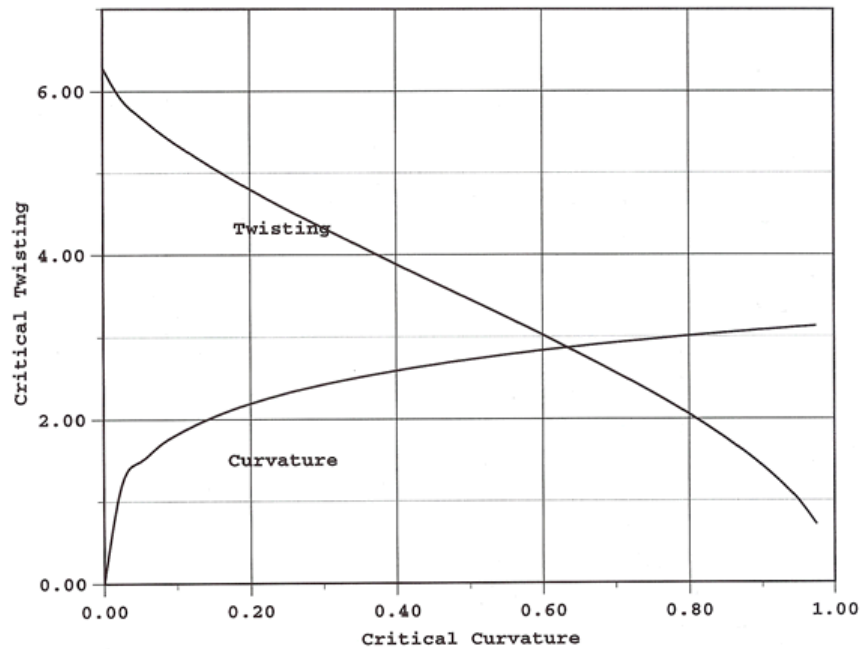


Figura 3 – Momento Torsor Crítico versus Curvatura Crítica

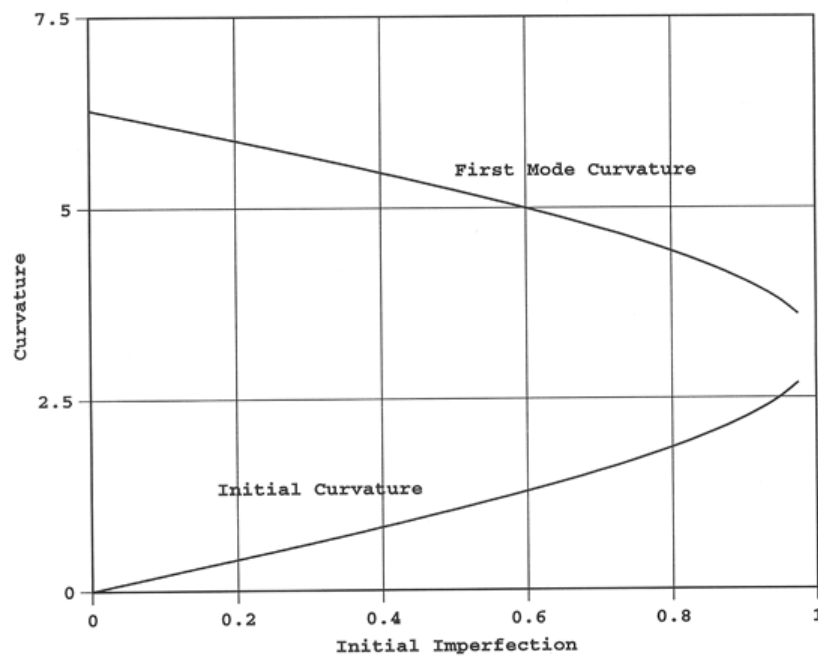


Figura 4 – Curvatura Inicial e Curvatura de primeiro Modo versus Imperfeição Inicial

A Figura 3 mostra a variação do momento torsor crítico em função da curvatura crítica enquanto que a Figura 4 mostra a variação da curvatura inicial e a variação da curvatura do primeiro modo de instabilidade com função da imperfeição inicial.

6 – CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou um critério simples, baseado numa formulação analítica, para estabelecer a tendência de umbilicais submarinos formação de laços. Apesar das limitações inerentes às hipóteses simplificadoras adotadas, o critério apresentado apresenta muitas vantagens como a sua simplicidade de aplicação e sua capacidade de prever a formação de laços com precisão suficiente para evita-los mediante a adoção de precauções que garantam que o raio de curvatura crítico não ocorra durante a instalação e a operação da estrutura. Os parâmetros de entrada do modelo apresentado são relativos às propriedades mecânicas do umbilical. Essas propriedades podem ser determinadas experimentalmente ou simuladas por meio de modelos que levem em consideração a interação das diversas camadas constituintes do umbilical. Os resultados do modelo apontam para uma redução significativa do momento torsor crítico com a curvatura inicial da estrutura. No caso de operações *offshore* as grandes curvaturas estão associadas às regiões próximas do fundo do mar, onde também a tração efetiva no umbilical é pequena. Essa combinação torna as regiões próximas ao fundo críticas em termos da formação de instabilidades em umbilicais e é nelas que se deve concentrar as atenções.

8 – REFERENCES

- 1.COSTELLO, G. A. (1990), Theory of Wire Rope, Springer-Verlag, New York, 106 p.
- 2.COYNE, J. (1990), Analysis of the formation and elimination of loops in twisted cable", IEEE Journal of Ocean Engineering, Vol. 15, No 2, pp. 72-83.
- 3.FELD G., OWEN D. G., REUBEN R. L. AND CROCKETT A. E. (1992), Mechanical behaviour of the metallic elements of submarine cables as a function of cable loading, Marinflex 92, Proc. of the First European Conference on Flexible Pipes., Umbilicals & Marine Cables, London.
- 4.JOLICOEUR, C AND CARDOU, A. (1991), A numerical comparison of current mathematical models of twisted wire cables under axisymmetric loads, Journal of Energy Resources Technology, Vol. 113, p241-149.
- 5.KNAPP R. H., LE T. T. AND CRUICKSHANK M. J. (1991), Design methodology for undersea umbilical cables, Ocean's 91, Ocean Technology & Opportunities in the Pacific for the '90s, Proc. IEEE., Vol. 3, October, Honolulu, Hawaii.
- 6.PINTO, W. T. (1995), *On the dynamics of low tension marine cables*, PhD. Thesis, University College London.
- 7.WITZ, J. A. AND TAN, Z. (1992a), On the Axial-Torsional Structural Behaviour of Flexible Pipes, Umbilicals and Marine Cables, Journal of Marine Structures, Vol. 5.
- 8.WITZ, J. A. AND TAN, Z. (1992b), On the flexural structural behaviour of flexible pipes, umbilicals and marine cables, Journal of Marine Structures, Vol. 5, Nos 2 & 3, p229-249.