

# Modelo matemático baseado nas equações de águas rasas para solução de problemas tridimensionais

Régis S. Pereira \*; Carlos E. M. Tucci

*Instituto de Pesquisas Hidráulicas - UFRGS*

*Av. Bento Gonçalves, 9500 Porto Alegre, RS.*

*\* regis.pereira@ufrgs.br*

**RESUMO:** O êxito no desenvolvimento de um modelo numérico para determinar a hidrodinâmica de corpos d'água, passa pela definição dos métodos numéricos utilizados para resolução das equações resultantes da modelagem matemática. Nos últimos anos, um esquema que combina diversos métodos numéricos tem se mostrado mais eficiente para solução das equações tridimensionais de águas rasas. Os modelos que se fundamentam nessa técnica utilizam uma combinação dos métodos de diferenças/volumes finitos e dos esquemas semi-implícitos/implícitos sobre uma grade não estruturada. Assim, o trabalho a seguir mostra o desenvolvimento de um algoritmo para aplicação dessa técnica, assim como a sua avaliação numérica. A análise numérica demonstrou que o modelo combina boa precisão com estabilidade. Assim, o modelo proposto possui as seguintes vantagens: facilidade de lidar com geometrias complexas, conserva a massa, estabilidade relativamente boa, lida de forma natural com áreas de inundação e é computacionalmente eficiente.

**PALAVRAS-CHAVE:** Equações de águas rasas, modelo tridimensional.

## 1. INTRODUÇÃO

A modelagem matemática em sistemas ambientais apresentava grandes dificuldades de desenvolvimento de cálculo antes do advento dos computadores, o que dificultava suas aplicações e impedia seu pleno desenvolvimento. As decisões apoiavam-se, então, em métodos gráficos ou em modelos físicos ou analógicos [1]. A partir da década de 1960, o crescimento tecnológico de forma acelerada alterou radicalmente, potencializando a utilização dos microcomputadores, possibilitando a evolução dos métodos numéricos, permitindo o desenvolvimento dos modelos matemáticos.

Atualmente, os modelos matemáticos na área de recursos hídricos têm aplicações em praticamente todas as áreas, desde a quantificação de processos hidrológicos até a determinação de ondas e correntes marinhas. Entre as áreas de maior desenvolvimento na aplicação dos modelos estão a determinação da qualidade de água tanto superficial quanto subterrânea, a meteorologia e o gerenciamento costeiro.

Segundo Wiegert [18], Schonnor [16] e Jorgensen [10] existem diversas razões para a utilização cada vez maior de modelos matemáticos para avaliação de sistemas hídricos, entre elas pode-se destacar: o preenchimento de lacunas de informações disponíveis, a extrema dificuldade de medir todos os processos simultaneamente, pela impossibilidade de testar hipóteses em campo, pela dificuldade de obter séries temporais longas e confiáveis, obter melhor compreensão do transporte e destino de substâncias químicas através da quantificação de suas reações; determinar possíveis concentrações de exposição química em organismos aquáticos e/ou humanos, etc.

Segundo Rosman [14], outra vantagem da utilização da modelagem matemática relaciona-se com o baixo custo, pois a gestão e gerenciamento de corpos d'água naturais requerem

dados ambientais que em geral têm custos de levantamento elevados. E, através de modelos calibrados, capazes de reproduzir valores nos pontos onde se fez medições, pode-se interpolar e extrapolar espacial e temporalmente as informações obtidas nos poucos pontos onde os dados foram medidos para toda a área de interesse, o que permite uma melhor interpretação das medições isoladas.

Uma vez que se deseja realizar um estudo de comportamento de um determinado sistema hídrico ou avaliar os impactos ambientais das ações antrópicas, é indispensável o conhecimento das características do escoamento e transporte do sistema. Os fenômenos naturais, tais como a circulação da água e transporte de constituintes, podem ser descritos matematicamente, por um conjunto de equações complexas que em conjunto com condições iniciais e de contorno, constituem os modelos matemáticos [15].

O presente trabalho tem como objetivo a aplicação de uma metodologia atualmente muito difundida no desenvolvimento de modelos hidrodinâmicos mas com poucas aplicações no Brasil. E realizar uma avaliação numérica deste modelo, pois apesar da grande difusão desta metodologia não foi realizada ainda uma análise numérica dos modelos resultantes.

## **2. MODELOS MATEMÁTICOS**

Os modelos matemáticos que representam a circulação hidrodinâmica em um corpo da água são baseados na equação da continuidade e do momento (equações de Navier-Stokes). A forma como tais equações se apresentam, dependem das simplificações feitas e dos métodos numéricos utilizados [17].

Os atuais modelos de circulação hidrodinâmica estão baseados em diversos métodos numéricos como diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos. Além de diversas técnicas de discretização temporal como os métodos explícitos, implícitos, semi-implícitos, ADI, etc. Em geral os desenvolvedores utilizam combinações dessas técnicas para atingir os seus objetivos [7]. E a escolha dessas combinações tem as mais variadas justificativas, desde preferência pessoal até estudos comparativos. Dentro deste contexto tem sido desenvolvido um método numérico mais prático para resolver a forma bidimensional das equações de águas rasas utilizando uma discretização temporal semi-implícita, diferenças finitas e uma aproximação Euleriana-Lagrangeana para advecção, estes modelos foram denominados de TRIM (Tidal Residual Intertidal Mudflat Model). Os resultados têm mostrado que os modelos que utilizam essa técnica são numericamente estáveis, eficientes e têm sido amplamente aplicados apresentando bons resultados [21]. Recentemente, os modelos 2D têm sido estendidos para aplicações tridimensionais (3D).

Apesar dos modelos baseados no TRIM estarem sendo cada vez mais aceitos, estes modelos utilizam grades estruturadas que resultam em erros de discretização devido a sua dificuldade de representar geometrias complexas, como é o caso do Rio Columbia, EUA. Segundo Zhang e Baptista [25], diversos modelos multi-camadas foram aplicados para determinar a circulação do Rio Columbia, mas nenhum deles conseguiu representar com fidelidade as condições reais, segundo o autor um dos principais motivos é a utilização de grades estruturadas. Apesar da metodologia utilizada pelos modelos TRIM, resultarem em modelos muito simples, estáveis e eficientes, havia a necessidade de implementação deste modelo para grades não-estruturadas.

Assim, Casulli e Zanolli [5] utilizaram os mesmos conceitos do TRIM e adicionaram a utilização das “grades ortogonais não estruturadas” que oferecem maior flexibilidade na confecção de grades de geometrias complexas e permite o refinamento da malha em locais específicos de maior interesse ou áreas problemáticas [7, 9, 19]. Conseqüentemente, não são necessárias transformações de coordenadas para solução das equações, diferentemente da maioria dos modelos 3D atuais que utilizam as grades estruturadas, que por motivos de

demanda computacional introduz uma transformação ortogonal de coordenadas no plano x-y e uma transformação para coordenadas  $\sigma$  (sigma) na vertical, estas transformações diminuem os custos computacionais [8], porém introduzem novos termos que resultam freqüentemente em grandes erros de discretização e/ou estabilidade [9, 12]. Logo em seguida, Casulli e Walters [4], aplicaram o método de volumes finitos para conservação da massa, tais modelos baseados no TRIM que utilizam grades não estruturadas e volumes finitos foram chamados de UnTRIM que são modelos ainda simples, estáveis, eficientes e agora flexíveis para representar geometrias complexas.

Uma vez que esta metodologia se mostrou promissora começaram a surgir evoluções do UnTRIM, como a proposta de Casulli e Zanolli [6] para escoamentos não hidrostáticos, onde foi obtida uma boa performance decompondo o termo de pressão em componentes hidrostáticos e não-hidrostáticos. Assim, a velocidade e a elevação da superfície livre são determinadas provisoriamente no primeiro meio passo de tempo utilizando as componentes hidrostáticas da pressão e corrigidas no segundo meio passo de tempo pela adição dos termos não hidrostáticos. Tal modificação foi aplicada pelo mesmo autor para alguns problemas idealizados com resposta analítica e para a Lagoa Venezia, obtendo resultados satisfatórios. Já Shen et al. [20] acoplou ao modelo UnTRIM modificado, um modelo paramétrico de vento utilizado pela National Weather Service para simular com mais precisão o campo de vento em tempestades e inundações de zonas costeiras. Os resultados mostraram que o modelo foi capaz de representar com precisão tempestades ao longo da costa, níveis e áreas de inundação. Pode-se ainda destacar o trabalho de MacWilliams et al. [11] no qual foi feita uma avaliação de um grande evento de cheia em 1997 na parte baixa do Lago Creek, Califórnia, que acabou ultrapassando as barreiras de contenção. O modelo demonstrou bons resultados, apesar dos poucos dados medidos durante o evento. A avaliação de rompimento de barragens utilizando este modelo também foi avaliada por Stelling [22] em situações hipotéticas.

Tendo em vista as vantagens e as crescentes aplicações do UnTRIM é que optou-se por utilizar como base a metodologia utilizada por este modelo. A seguir serão descritas as equações que governam o escoamento hidrodinâmico nas quais serão aplicadas a metodologia proposta.

### 3. EQUAÇÕES GOVERNANTES

A elaboração do modelo matemático que descreve o escoamento em superfície livre inicia pela integração da equação da continuidade desde o fundo ( $z = -h$ ) até a superfície ( $z = \eta$ ) [25].

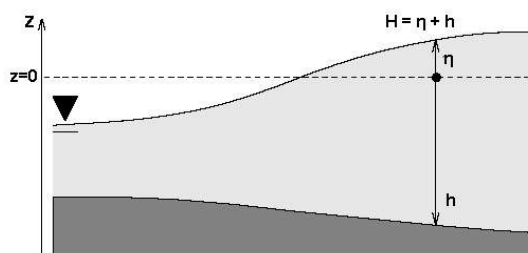


Figura 1: Relação entre a elevação da superfície livre ( $\eta$ ), profundidade a partir da superfície livre não perturbada ( $h$ ) e profundidade total ( $H$ ).

A equação da continuidade para fluidos incompressíveis é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1)$$

onde:  $t$  = tempo, em [s];  $x, y, z$  = coordenadas cartesianas, em [m];  $u$  = componente da velocidade na direção  $x$ , em [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ];  $v$  = componente da velocidade na direção  $y$ , em [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ];  $w$  = componente da velocidade na direção  $z$ , em [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ].

A equação da continuidade integrada na vertical, e adicionada as condições de contorno de superfície livre e de fundo, toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz = 0 \quad (2)$$

Já a forma geral da equação da conservação da quantidade de movimento se apresenta da seguinte maneira:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\tau_{zx})}{\partial z} + a_x \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\tau_{zy})}{\partial z} + a_y \quad (4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\tau_{yz})}{\partial y} + a_z \quad (5)$$

onde:  $p$  = pressão, em [ $\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ ];  $\tau$  = tensão de cisalhamento, em [ $\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ ];  $a$  = forças de corpo (Coriolis, gravidade, etc), em [ $\text{N}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{kg}^{-1}$ ]. As equações 3 a 5 são gerais e podem ser utilizadas para fluidos homogêneos e não-homogêneos, assim como para fluidos compressíveis e incompressíveis. As formas nas quais essas equações são aplicadas dependem das considerações feitas, como as equações de Euler em que as forças viscosas são desprezadas e as de Navier-Stokes onde se considera a densidade ( $\rho$ ) e a viscosidade ( $\mu$ ) constantes.

O modelo a ser desenvolvido terá como principal consideração a hipótese de escoamento em águas rasas, onde o comprimento do corpo d'água ( $L$ ) é bem maior que a profundidade

(H). Para que um escoamento seja considerado de águas rasas  $\frac{L}{H} > 20$ . Os termos de pressão das equações 3 a 5 podem ser decompostos numa soma de componentes hidrostáticos e não-hidrostáticos [3]. A componente hidrostática é determinada utilizando a consideração feita acima na equação do movimento na direção  $z$ . Pois a hipótese de águas rasas mostra que somente ondas longas são levadas em consideração. Assim, pode-se desprezar as acelerações e tensões verticais na equação 5. Então o termo de pressão pode ser expresso como:

$$p = p_a + g(\eta - z) + g \int \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} dz + q \quad (6)$$

onde:  $p_a$  = pressão atmosférica, em [ $\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ ];  $\rho_0$  = massa específica de referência (1025), em [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ];  $q$  = componente não hidrostático da pressão, em [ $\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ ]. Substituindo então a expressão 6 nas equações 3 a 5, resultam as seguintes equações:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f_v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{g}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta} \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} dz + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\tau_{zx})}{\partial z} \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - f_u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial y} - \frac{g}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \int_z^{\eta} \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} dz + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\tau_{zy})}{\partial z} \quad (8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\tau_{yz})}{\partial z} \quad (9)$$

onde:  $f$  = parâmetro de Coriolis, em  $[s^{-1}]$ .

Se a aproximação de pressão hidrostática é feita, a equação 9 é desprezada e  $q = 0$ , neste caso considera-se que componente hidrostática não tem efeito sobre o escoamento. A condição de contorno para as equações do movimento na superfície livre é determinada pela tensão do vento e a condição de contorno no fundo é dada pelo atrito de fundo na interface água-sedimento.

Assim um modelo geral que descreva a circulação de corpos d'água é formado pelo sistema das seguintes equações 1, 2, 7, e 8, sendo que as incógnitas a serem determinadas são  $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $\eta$ .

#### 4. APLICAÇÃO DO MÉTODO UNTRIM

Será utilizado um esquema semi-implícito, para obter um algoritmo eficiente o qual é independente da velocidade da onda de superfície livre, coeficiente de arraste do vento, viscosidade vertical e do atrito de fundo. A elevação da superfície livre na equação do movimento horizontal (7 e 8) e a velocidade da superfície livre (2) são discretizadas pelo método  $\theta$  [4], o qual determina um peso para implicidade do esquema. Além disso, para estabilidade os termos de arraste do vento, da viscosidade vertical e do atrito de fundo serão discretizados implicitamente.

Desde que as equações 1, 2, 7, e 8 sejam invariantes sobre rotação nos eixos  $x$  e  $y$  no plano horizontal, a aplicação do esquema semi-implícito de diferenças finitas para determinação das componentes da velocidade em cada face dos prismas da grade não-estruturada resulta na seguinte expressão:

$$u_{j,k}^{n+1} = F \cdot u_{j,k}^n - g \cdot \frac{\Delta t}{\delta_j} \cdot \left[ (1-\theta) \cdot (\eta_{i(j,2)}^n - \eta_{i(j,1)}^n) \right] + \theta \cdot (\eta_{i(j,2)}^{n+1} - \eta_{i(j,1)}^{n+1})$$

$$+ \frac{\Delta t}{\Delta z_{j,k}^n} \cdot \left[ v_{j,k+\frac{1}{2}}^v \cdot \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1}}{\Delta z_{j,k+\frac{1}{2}}^n} - v_{j,k-\frac{1}{2}}^v \cdot \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{\Delta z_{j,k-\frac{1}{2}}^n} \right] \quad (10)$$

$$k = m_i, m_i + 1, \dots, M_i^n - 1$$

Assume-se que a direção positiva de  $u_{j,k}^n$  vai de  $i(j,1)$  para  $i(j,2)$ .

onde:  $u_{j,k}^n$  = componente da velocidade normal ao lado  $j$  do prisma, na camada vertical  $k$  e no tempo  $n$ , em  $[m.s^{-1}]$ ;  $F$  = operador de diferenças finitas que conta com a contribuição da discretização dos termos convectivos e de viscosidade turbulenta horizontal [2], dado pela equação 11.

Se forem desconsiderados todos os efeitos das variáveis relacionadas a  $F$ , este reduz-se a um operador identidade  $F \cdot u_{j,k}^n = u_{j,k}^n$ . O termo  $F$  pode ser determinado de diversas maneiras, a mais usual é utilização do esquema Euleriano-Lagrangeano, como segue:

$$F \cdot u_{j,k}^n = \frac{[1 - \theta \cdot (1 - \theta) \cdot f^2 \cdot \Delta t^2] \cdot u_{j,k}^* + f \cdot \Delta t \cdot v_{j,k}^*}{1 + \theta^2 \cdot f^2 \cdot \Delta t^2} + v^h \cdot \Delta t \cdot \Delta h \cdot u_{j,k}^* \quad (11)$$

$u_{j,k}^*$  = componente horizontal da velocidade normal ao lado  $j$  do prisma interpolada do

tempo  $n$  até o fim da trajetória Lagrangeana, em  $[\text{m}\cdot\text{s}^{-1}]$ ;  $v_{j,k}^*$  = componente horizontal da velocidade ortogonal a  $u_{j,k}^*$ , em  $[\text{m}\cdot\text{s}^{-1}]$ ;  $\Delta h$  = discretização do Laplaciano horizontal. A trajetória Lagrangeana é calculada pela integração da velocidade de forma regressiva no tempo do ponto  $(j, k)$  em  $t^{n+1}$  até sua localização no tempo  $t^n \cdot \Delta_h$ . Por critérios de estabilidade o parâmetro  $\theta$  deve ficar entre 0,5 e 1,0.

O incremento da discretização vertical  $\Delta z_{j,k}^n$ , é definido como a distância entre duas superfícies consecutivas, exceto próximo ao fundo e a superfície livre, onde  $\Delta z_{j,k}^n$  é a distância entre a superfície do prisma e o fundo e da superfície livre, respectivamente. Desta forma,  $\Delta z_{j,k}^n$  depende tanto da localização espacial quanto da discretização temporal. Este incremento vertical também pode ser considerado igual a zero, em regiões que podem ser secas, temporariamente. Completando a descrição dos termos das equações 10 e 11, tem-se que  $m_j$  e  $M_j^n$ , sendo que  $1 \leq m_j \leq M_j^n \leq N_z$ , correspondem aos limites inferior e superior do índice  $k$ . Dessa forma,  $m$  e  $M$  dependem da sua localização espacial e podem variar com o tempo para acompanhar a dinâmica da superfície livre. Deste ponto em diante  $m_j$  e  $M_j^n$  serão tratados como  $m$  e  $M$ , para facilitar a visualização do equacionamento.

Os valores da  $u_{j,k}^{n+1}$  acima da superfície livre e abaixo do fundo obtidas pela equação 10 são eliminadas pela média das condições de contorno de superfície livre (12) e de fundo (13), que resulta nas seguintes equações de diferenças:

$$v_{j,M+\frac{1}{2}}^v \cdot \frac{u_{j,M+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j,M}^{n+1}}{\Delta z_{j,M+\frac{1}{2}}^{n+1}} = \gamma_{T,j}^{n+1} \cdot (u_{a,j}^{n+1} - u_{j,M}^{n+1}) \quad (12)$$

$$v_{j,m-\frac{1}{2}}^v \cdot \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta z_{j,m-\frac{1}{2}}^{n+1}} = \gamma_{B,j}^{n+1} \cdot u_{j,m}^{n+1} \quad (13)$$

Aplicando então o MVF semi-implícito a equação 2 no centro de cada polígono, tem-se:

$$P_i \cdot \eta_i^{n+1} = P_i \cdot \eta_i^n - \theta \cdot \Delta t \cdot \sum_{l=1}^{S_i} \left( s_{i,l} \cdot \lambda_{|i,l|} \cdot \sum_{k=m}^M \Delta z_{j,(i,l),k}^n \cdot u_{j,(i,l),k}^{n+1} \right) - (1 - \theta) \cdot \Delta t \cdot \sum_{l=1}^{S_i} \left( s_{i,l} \cdot \lambda_{|i,l|} \cdot \sum_{k=m}^M \Delta z_{j,(i,l),k}^n \cdot u_{j,(i,l),k}^n \right) \quad (14)$$

Nesta equação  $P_i$  corresponde a área do polígono  $i$  e  $s_{i,l}$  é uma função que indica a orientação da velocidade normal definida no lado  $l$  do polígono  $i$ . Se a velocidade positiva corresponde a fluxo saindo da coluna d'água,  $s_{i,l} = 1$ , conseqüentemente, se a velocidade positiva significa fluxo chegando,  $s_{i,l} = -1$ . Então,  $s_{i,l}$  pode ser definido como:

$$s_{i,l} = \frac{i \cdot [j(i,1),2] - 2 \cdot i + i \cdot [j(i,1),1]}{i \cdot [j(i,1),2] - i \cdot [j(i,1),1]} \quad (15)$$

As equações 10 e 14, constituem um sistema linear de  $N_z \cdot N_s + N_p$  equações. Este sistema deve ser resolvido a cada passo de tempo para determinar as componentes da

velocidade e a elevação de superfície livre provisórias.

O sistema com  $N_z \cdot N_s + N_p$  equações pode se tornar muito grande mesmo para pequenos valores de  $N_z$ ,  $N_s$  e  $N_p$ . Portanto, Casulli e Lang [3] sugerem decompor o sistema formado pelas equações 10 e 14, primeiramente num conjunto de  $N_s$  sistemas tridiagonais independentes de  $N_z$  equações e de um sistema linear de  $N_p$  equações.

Multiplicando o sistema formado pelas equações 10 e 14 por  $\Delta z_{j,k}^n$  e incluindo as condições de contorno 12 e 13, as equações 10 e 14 podem ser escritas na forma matricial como:

$$A_j^n \cdot U_j^{n+1} = G_j^n - \theta \cdot g \cdot \frac{\Delta t}{\delta_j} \cdot (\eta_{i(j,2)}^{n+1} - \eta_{i(j,1)}^{n+1}) \cdot \Delta Z_j^n \quad (16)$$

$$P_i \cdot \eta_i^{n+1} = P_i \cdot \eta_i^n - \theta \cdot \Delta t \cdot \sum_{l=1}^{S_i} s_{i,l} \cdot \lambda_{j(i,l)} \cdot [\Delta Z_{j(i,l)}^n]^T \cdot U_{j(i,l)}^{n+1} - (1-\theta) \cdot \Delta t \cdot \sum_{l=1}^{S_i} s_{i,l} \cdot \lambda_{j(i,l)} \cdot [\Delta Z_{j(i,l)}^n]^T \cdot U_{j(i,l)}^n \quad (17)$$

Onde  $U$ ,  $\Delta Z$ ,  $G$  e  $A$  são definidos como:

$$U_j^{n+1} = \begin{bmatrix} u_{j,M}^{n+1} \\ u_{j,M-1}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{j,m}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad \Delta Z_j^n = \begin{bmatrix} \Delta z_{j,M}^n \\ \Delta z_{j,M-1}^n \\ \vdots \\ \Delta z_{j,m}^n \end{bmatrix},$$

$$G_j^n = \begin{bmatrix} \Delta z_{j,M}^n \cdot \left\{ F \cdot u_{j,M}^n - \frac{\Delta t}{\delta_j} \cdot (1-\theta) \cdot \left[ g \cdot (\eta_{i(j,2)}^n - \eta_{i(j,1)}^n) + q_{i(j,2),M}^n - q_{i(j,1),M}^n \right] \right\} + \Delta t \cdot \gamma_{T,j}^{n+1} \cdot u_{a,j}^{n+1} \\ \Delta z_{j,M-1}^n \cdot \left\{ F \cdot u_{j,M-1}^n - \frac{\Delta t}{\delta_j} \cdot (1-\theta) \cdot \left[ g \cdot (\eta_{i(j,2)}^n - \eta_{i(j,1)}^n) + q_{i(j,2),M-1}^n - q_{i(j,1),M-1}^n \right] \right\} \\ \vdots \\ \Delta z_{j,m}^n \cdot \left\{ F \cdot u_{j,m}^n - \frac{\Delta t}{\delta_j} \cdot (1-\theta) \cdot \left[ g \cdot (\eta_{i(j,2)}^n - \eta_{i(j,1)}^n) + q_{i(j,2),m}^n - q_{i(j,1),m}^n \right] \right\} \end{bmatrix}$$

$$A_j^n = \begin{bmatrix} \Delta z_{j,M}^n + a_{j,M-\frac{1}{2}}^n + \gamma_{T,j}^{n+1} \cdot \Delta t & -a_{j,M-\frac{1}{2}}^n & & 0 \\ -a_{j,M-\frac{1}{2}}^n & \Delta z_{j,M-1}^n + a_{j,M-\frac{1}{2}}^n + a_{j,M-\frac{3}{2}}^n & -a_{j,M-\frac{1}{2}}^n & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & & -a_{j,m+\frac{1}{2}}^n & \Delta z_{j,m}^n + a_{j,m+\frac{1}{2}}^n + \gamma_{B,j}^{n+1} \cdot \Delta t \end{bmatrix}$$

sendo que:

$$a_{j,k\pm\frac{1}{2}}^n = v^y_{j,k\pm\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z_{j,k\pm\frac{1}{2}}^n}$$

Substituindo  $U_j^{n+1}$  da equação 16 em 14, tem-se a equação discreta para determinação da

elevação da superfície livre, dada por:

$$\begin{aligned}
& P_i \cdot \eta_i^{n+1} - g \cdot \theta^2 \cdot \Delta t^2 \cdot \sum_{l=1}^{S_i} \left\{ \frac{s_{i,l} \cdot \lambda_{j(i,l)}}{\delta_{j(i,l)}} \cdot \left[ (\Delta Z)^T \cdot A^{-1} \cdot \Delta Z \right]_{j(i,l)}^n \cdot \left( \eta_{i[j(i,l),2]}^{n+1} - \eta_{i[j(i,l),1]}^{n+1} \right) \right\} \\
& = P_i \cdot \eta_i^n - (1 - \theta) \cdot \Delta t \cdot \sum_{l=1}^{S_i} \left\{ s_{i,l} \cdot \lambda_{j(i,l)} \cdot \left[ (\Delta Z)^T \cdot U \right]_{j(i,l)}^n \right\} \\
& - \theta \cdot \Delta t \cdot \sum_{l=1}^{S_i} \left\{ s_{i,l} \cdot \lambda_{j(i,l)} \cdot \left[ (\Delta Z)^T \cdot A^{-1} \cdot G \right]_{j(i,l)}^n \right\}
\end{aligned} \tag{18}$$

Sendo a matriz  $A_j^n$  positiva definida, sua inversa também tem a mesma característica. Assim  $\left[ (\Delta Z)^T \cdot A^{-1} \cdot \Delta Z \right]_j^n$  resulta num número positivo. Portanto, a equação 18 constitui um sistema linear, esparsos de  $N_p$  equações para  $\eta_i^{n+1}$ . Este sistema é predominantemente diagonal, simétrico e positivo definido. Assim, solução pode ser eficientemente obtida utilizando o método de gradientes conjugados.

Uma vez a elevação da superfície livre provisória tenha sido determinada, as equações 16, formarão um sistema linear tridiagonal para  $U_j^{n+1}$ . Cada um desses sistemas é independente um do outro, simétricos e positivos definidos. Portanto, podem ser convenientemente solucionados por um método direto para obter  $U_j^{n+1}$  através do domínio computacional.

Finalmente, aplicando-se o mesmo procedimento de discretização que resultou na equação 10 na equação (1) pode-se determinar a componente vertical da velocidade na face superior de cada prisma, considerando  $w_{i,m+1/2}^{n+1} = 0$ . Desta forma, a velocidade vertical em cada coluna d'água é determinada por:

$$\begin{aligned}
w_{i,k+\frac{1}{2}}^{n+1} &= w_{i,k+\frac{1}{2}}^n - \frac{I}{P_i} \sum_{l=1}^{S_i} s_{i,l} \cdot \lambda_{j(i,l)} \cdot \Delta z_{j(i,l),k}^n \cdot u_{j(i,l),k}^{n+1} \\
k &= m_i, m_i + 1, \dots, M_i^n - 1
\end{aligned} \tag{19}$$

O algoritmo apresentado acima inclui a simulação de áreas inundações (wetting and drying areas), que segundo Zhang e Baptista [25] é um dos pontos altos do modelo UnTRIM, pois lida de forma natural e muito eficiente com estas situações. Em cada passo de tempo a nova profundidade  $H_j^{n+1}$  nos lados dos polígonos são definidas como:

$$H_j^{n+1} = \max \left[ 0, h_j + \eta_{i(j,1)}^{n+1}, h_j + \eta_{i(j,2)}^{n+1} \right] \tag{20}$$

Os espaçamentos verticais  $\Delta z_{j,k}^{n+1}$  são atualizados de acordo com 20. Então, quando um valor nulo (na prática utiliza-se um valor positivo bem pequeno, a fim de evitar divisões por 0) aparece para  $H_j^{n+1}$  implica que todas as faces verticais que separam prismas entre a coluna d'água  $i(j,1)$  e  $i(j,2)$  são secos e podem tornar-se molhados no futuro quando  $H_j^{n+1}$  tornar-se positivo.



Um aspecto bastante interessante do algoritmo apresentado é o fato de que o tamanho e a estrutura do sistema linear dado pela equação 18 é independente da resolução vertical. A maior parte do esforço computacional está associado a determinação da elevação da superfície livre através da equação 18, uma discretização vertical muito fina pode ser utilizada resultando num aumento no tempo de processamento aceitável. Por outro lado, a definição de apenas uma camada vertical torna o equacionamento num modelo bidimensional integrado na vertical.

Resumindo, em cada passo de tempo, as variáveis de escoamento são determinados pelo cálculo da elevação da superfície livre provisória  $(\eta_i^{n+1})$  obtida pelo sistema linear 18. A

seguir, o campo de velocidades'  $\left( u_{j,k}^{n+1}, w_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} \right)$  provisório é obtido das equações 10 e 19. Com o modelo proposto apresentado buscou-se então realizar a análise numérica do modelo visando as análises de precisão, sensibilidade e estabilidade do modelo.

## 5. ESTUDO DE CASO

O desenvolvimento da análise numérica de um modelo exige o conhecimento prévio do comportamento do sistema a ser simulado para que as devidas análises possam ser realizadas. Dessa forma, para a análise numérica do modelo hidrodinâmico proposto foi utilizada como área modelada uma região no norte da Holanda, a qual compreende uma parte do Mar do Wadden e a entrada entre duas ilhas até o continente (Friesian Inlet), conforme a Figura 2. O escoamento na região é dominado pela maré lunar semi-diurna. A escolha se deu pelo motivo da possibilidade de comparação com os resultados da mesma região obtidos pelo modelo Delft3D que utiliza este estudo de caso como apresentação do modelo, o qual foi profundamente estudado durante o desenvolvimento do trabalho de Pereira [13].

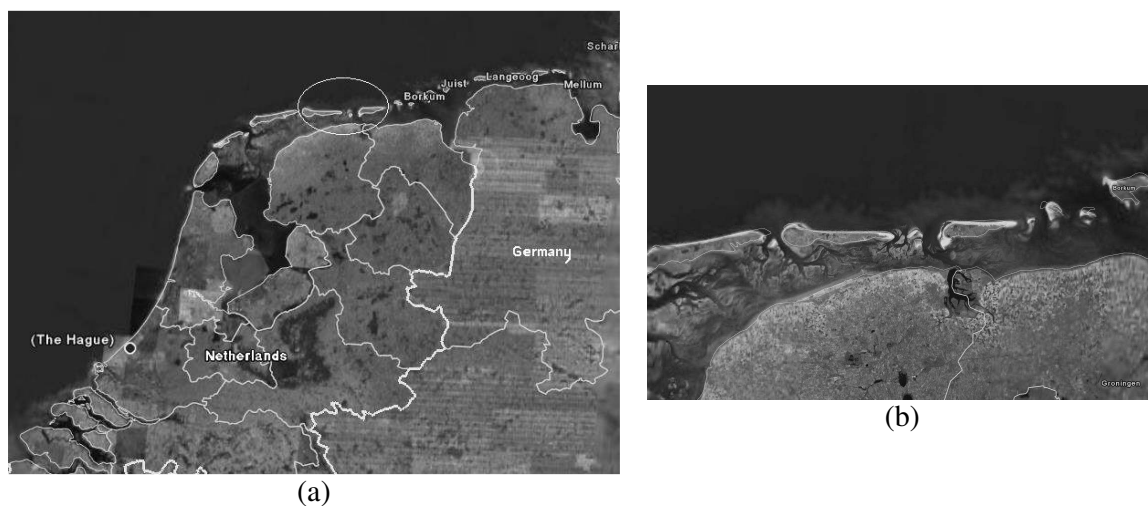


Figura 2: a) Região modelada do Mar de Wadden; b) Detalhe da Friesian Inlet.

Desta forma, o sistema modelado foi reproduzido em todos os detalhes para aplicação do modelo proposto e análise numérica. A única diferença na reprodução do estudo de caso do modelo Delft3D para o modelo proposto foi a substituição da grade estruturada não ortogonal Figura 3a utilizada pelo Delft3D pela grade não estruturada do modelo usado Figura 3b.

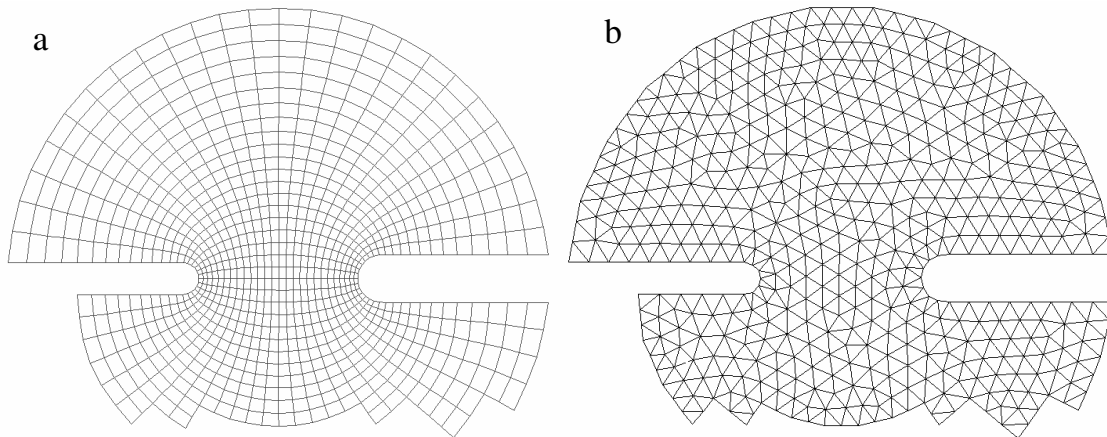


Figura 3: a) Grade não-estruturada; b) Grade estruturada não ortogonal.

Como condições de contorno foram definidas fronteiras fechadas a região do continente e as bordas das ilhas e como fronteira aberta a região do Mar de Wadden, a qual foi prescrita como uma maré lunar-semi-diurna, com uma frequência de  $28,8^\circ \cdot h^{-1}$ , amplitude de 1,1m e fase de  $-34,26^\circ$ . A condição inicial para todos os casos foi definida o nível da superfície livre de 1,9 m. Quanto à batimetria foi definida uma profundidade constante de 5 m divididos em cinco camadas de 1 m cada. Para comparação dos resultados foram escolhidos cinco pontos de controle do nível e uma seção transversal (entre as ilhas) para acompanhamento das velocidades (Figura 4).

Outra variável importante neste estudo de caso é o vento, este, entretanto será caracterizado em cada uma das situações as quais o modelo for submetido.

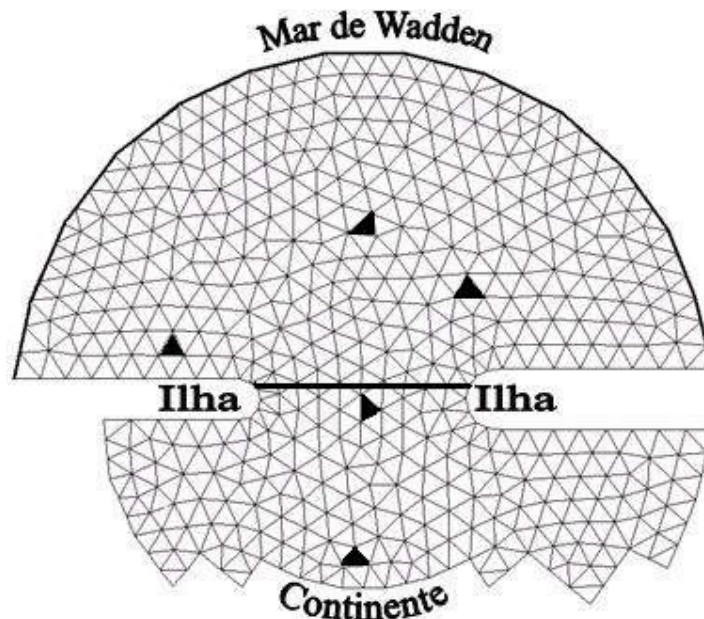


Figura 4: Grade com a localização das condições de contorno e pontos de monitoramento.

## 6. ANÁLISE NUMÉRICA

Independente do modelo a ser utilizado é indispensável que algumas determinadas características do modelo sejam analisadas, como estabilidade, precisão, sensibilidade e incertezas relacionadas ao seu uso. Em geral, a grande maioria dos “usuários” de modelos desconhece ou pouco se preocupam com essas características que influenciam de forma decisiva nos resultados obtidos.

### 6.1. Sensibilidade

A análise de sensibilidade é um dos procedimentos chaves na aplicação de um modelo, uma vez que conhecer os parâmetros mais sensíveis torna a calibração muito mais fácil e rápida.

Um modelo complexo possui muitos graus de liberdade que estão ligados aos parâmetros que caracterizam o sistema, as variáveis de estado, as condições iniciais do problema e as relações não lineares existentes entre estes três fatores. Este grande número de graus de liberdade implica que os resultados são afetados por cada uma das combinações dos fatores citados, o que pode acarretar uma quantidade de combinações muitas vezes inviável de manipular. Desta forma, a análise de sensibilidade visa diminuir o número de combinações identificando qual o grau de influência de cada fator nos resultados, facilitando a escolha de daqueles que demonstram contribuições realmente significativas.

No modelo utilizado os principais parâmetros a serem avaliados são: coeficiente de viscosidade turbulenta horizontal ( $\nu_h$ ), coeficiente de viscosidade turbulenta vertical ( $\nu_v$ ), coeficiente de atrito de fundo (Chezy) e o coeficiente de arrasto do vento ( $r_T$ ). A escolha do intervalo de variação dos parâmetros se baseou em dados de literatura, que em geral são os mais utilizados na prática (Tabela 1).

Tabela 1: Intervalo de variação dos parâmetros a serem avaliados.

| Parâmetro | Intervalo                                       |
|-----------|---|
| $\nu_h$   | 5 a 15 $\text{m}^2\text{s}^{-1}$                |
| $\nu_v$   | $10^{-5}$ a $10^{-1}$ $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ |
| Chezy     | 40 a 70 $\text{m}^{0,5}\text{s}^{-1}$           |
| $r_T$     | 2e-06 a 4e-06                                   |

### 6.2. Estabilidade

O conceito de estabilidade está ligado ao crescimento e decaimento dos erros introduzidos em qualquer estágio dos cálculos computacionais. Estes erros, responsáveis pela instabilidade podem ser provenientes de deficiências da formulação, discretizações temporais e espaciais inadequadas, ou ainda podem ser oriundos da limitação do computador não poder trabalhar com um número infinito de casas decimais. Pois na prática, os cálculos são realizados com um número finito de algarismos significativos, o que resulta em erros de arredondamento em cada um dos passos ou iterações do método de solução. Dessa forma, um determinado esquema é estável se o efeito cumulativo dos erros é desprezível.

A estabilidade de um esquema pode ser avaliada por métodos diretos, entre os quais se destacam o método da Matriz e o método de Von Neumann. Ambos se baseiam na previsão se haverá ou não crescimento do erro existente entre a solução exata e o valor obtido pelo esquema utilizado. Os dois métodos devem ser aplicados às equações linearizadas, desta forma se torna inviável a adoção destes métodos para o estudo da estabilidade do modelo proposto devido a sua grande não-linearidade.

Outra forma de avaliação da estabilidade pode ser feita pela simulação de cenários com diferentes valores de parâmetros e discretizações, até obter os melhores resultados. A estabilidade do método utilizado foi avaliada por Casulli e Cattani [2], onde foi apresentada a aplicação do fator de implicidade ao modelo para grades estruturadas. Segundo as simulações realizadas pelo autor a utilização do fator de implicidade igual a ½ reduz sensivelmente as instabilidades. A aplicação deste mesmo fator a versão não estruturada resulta nos mesmos resultados. Desta forma a análise de estabilidade realizada neste trabalho levou em conta a discretização temporal do modelo proposto.

### 6.3. Precisão

A precisão de um modelo é a sua capacidade de representar os dados observados com a menor diferença possível. É claro que uma representação perfeita de um ambiente natural é impossível devido à complexidade dos processos e relações existentes, as quais nem sempre são compreendidas, e conseqüentemente não podem ser modeladas ou muitas considerações devem ser feitas para tal feito. Uma estratégia para analisar a precisão de um modelo é a sua aplicação a um problema que tenha solução analítica. Mas um problema deste tipo invariavelmente é muito simples e não exige que um modelo complexo mostre todas suas características. Desta forma, a análise de precisão de um modelo como o UnTRIM deve ser feita comparando os resultados simulados com dados reais.

Desta forma, a precisão do modelo proposto foi testada comparando os resultados obtidos pelo modelo Delft3D calibrado e validado para o estudo de caso apresentado, com os resultados das simulações realizadas com o modelo proposto com os mesmos valores de parâmetros, condições de contorno e iniciais.

## 7. RESULTADOS

### 7.1. Análise de Sensibilidade

Na análise de sensibilidade realizaram-se simulações variando cada parâmetro individualmente dentro do intervalo especificado anteriormente, ou seja, manteve-se três parâmetros no valor médio e outro no valor máximo e posteriormente no valor mínimo. Desta forma, pode-se determinar o coeficiente de sensibilidade com relação ao nível da superfície livre que será dado por:

$$cs = \frac{\text{variação relativa do nível}}{\text{variação relativa do parâmetro avaliado}} \quad (1)$$

Dessa forma, quanto maior for o coeficiente de sensibilidade maior será a influência deste parâmetro.

As simulações demonstraram que, para um passo de tempo de 300s, mesmo utilizando os valores extremos dos coeficientes de viscosidade turbulenta (horizontal e vertical) o coeficiente de sensibilidade resultou num valor muito baixo (variação do nível praticamente inexistente), indicando que estes parâmetros podem ser mantidos constantes e em seus valores médios  $10 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  e  $5 \times 10^{-2} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  para os coeficientes horizontal e vertical, respectivamente.

Entretanto, pequenas variações nos coeficientes de arrasto do vento e de atrito de fundo resultam em coeficientes de sensibilidade grandes quando comparados com os anteriores, conforme ilustra a Figura 5.

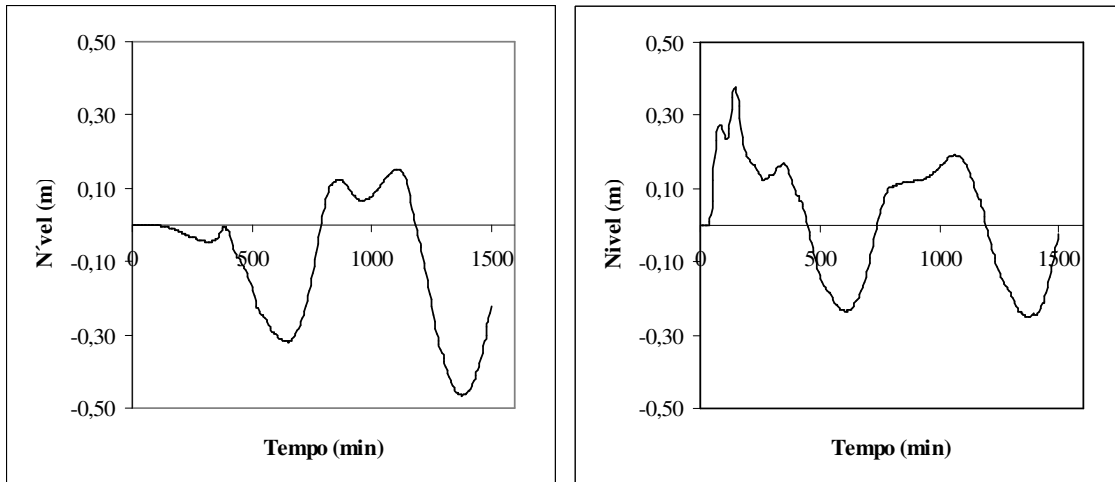


Figura 5: Variação do nível da superfície livre na região entre as ilhas. (a) Com relação ao coeficiente de arrasto do vento; (b) Com relação ao coeficiente de atrito de Chezy.

## 7.2. Análise de Estabilidade

Para análise de estabilidade o passo de integração temporal foi variado de 100s até 500s, levando em conta que foi utilizado como fator de implicidade igual a 0,5 como já foi dito anteriormente. Realizando uma simulação de 25h, percebeu-se que até um passo de 300s os resultados foram muito bons quando comparados com resultados já obtidos pelo modelo Delft3D. Entretanto, para valores maiores os resultados começam a se tornarem oscilatórios. Quando o valor de 500s é utilizado temos o valor máximo para que os erros não cresçam indefinidamente (Figura 6).

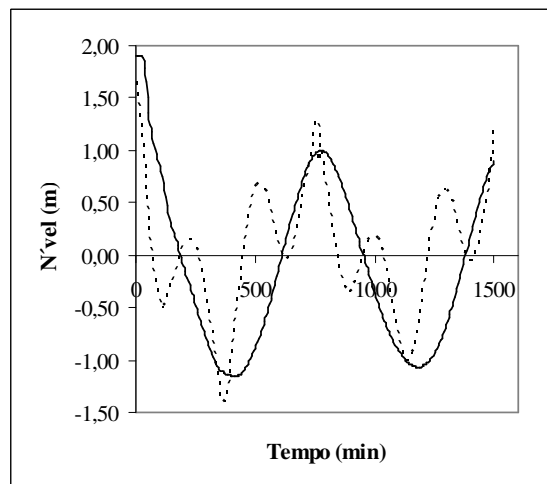


Figura 6: Nível da superfície livre (Linha contínua:  $\Delta t=300s$ ; Linha pontilhada:  $\Delta t=500s$ ).

## 7.3. Análise de Precisão

A análise de precisão foi realizada comparando os resultados das simulações do modelo proposto com os resultados previamente obtidos com o modelo Delft3D. Os dados utilizados do modelo delft3D foram obtidos após toda análise numérica deste modelo e posteriormente a sua calibração e validação para o caso em estudo, por esta razão utilizou-se estes dados como referência para a avaliação do modelo proposto. Para esta análise simulou-se 25h com um vento variando de  $0 \text{ m.s}^{-1}$  e  $0^\circ$  a  $10 \text{ m.s}^{-1}$  e  $90^\circ$ , onde cada situação durou o mesmo intervalo

de tempo (12,5h). Os resultados dos níveis da simulação para os cinco pontos de observação no modelo são apresentados na Figura 7.

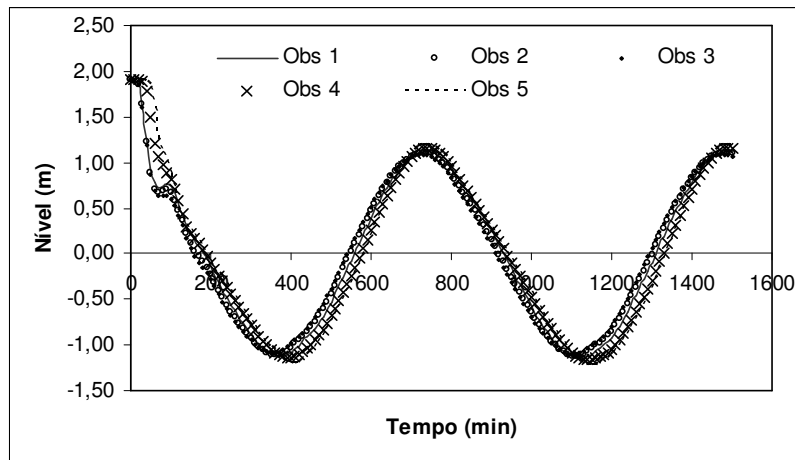


Figura 7: Níveis da superfície livre nos cinco pontos de observação

Com relação às variações verticais pode-se observar que nas épocas de vento as velocidades no fundo ficaram em torno de 0,1 a 0,3 m/s enquanto que na superfície entre 0,6 e 0,8 m/s na região de estrangulamento entre as ilhas (Figura 8). Mesmo comportamento percebido nas simulações realizadas pelo Delft3D (Figura 9)



Figura 8: Perfil vertical na região onde foi estipulada a seção transversal de monitoramento.

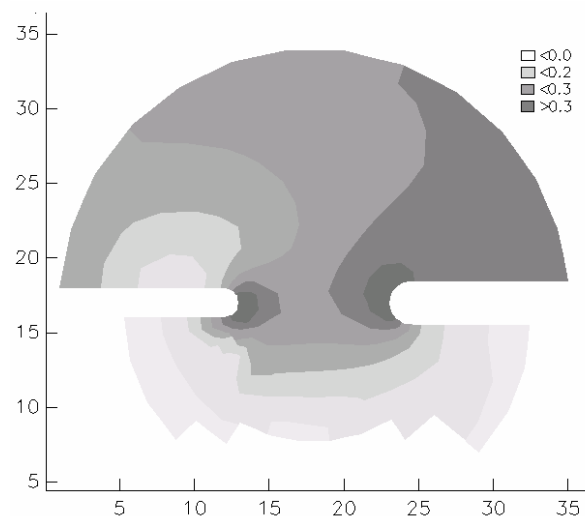


Figura 9: Distribuição das velocidades na camada de fundo.

Utilizando a definição apresentada por Walstra et al. [23] para comparação entre dados observados e dados simulados o RMAE (Relative Mean Absolute Error) e também as faixas definidas pelo autor conforme a Tabela 2, o modelo proposto apresentou um desempenho excelente já que o RMAE ficou no valor de 0,05.

Tabela 2: Faixas de valores para o RMAE

| <b>RMAE</b> | <b>Desempenho</b> |
|-------------|-------------------|
| <0,2        | Excelente         |
| 0,2-0,4     | Bom               |
| 0,4-0,7     | Aceitável         |
| 0,7-1,0     | Ruim              |
| >1,0        | Péssimo           |

## **7. CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A análise numérica demonstrou que o modelo combina boa precisão com estabilidade, demonstrando ainda que o modelo proposto é capaz de representar situações tão complexas quanto modelos de renome como o Delft3D, além de ser capaz de representar geometrias extremamente complexas, que são de difícil solução por modelos de grades estruturadas como o Delft3D.

Esta vantagem é de extrema importância para a pesquisa que esta em desenvolvimento no Instituto de Pesquisas Hidráulicas da Universidade federal do Rio Grande do Sul (IPH/UFRGS). Esta pesquisa tem como objetivo a simulação hidrodinâmica tridimensional do sistema Lagoa dos Patos – Lagoa Guaíba – Rio Jacui, uma vez que este sistema apresenta uma geometria extremamente complexa como pode ser observado abaixo. Portanto este trabalho é um passo inicial para posterior aplicação deste modelo ao sistema apresentado



Figura 10: Sistema Lagoa dos Patos – Lago Guaíba – Rio Jacui

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIGRÁFICAS

- 1 AMARAL, K. J. *Modelagem computacional como ferramenta para o gerenciamento integrado de recursos hídricos*. 2003. 160p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.
- 2 CASULLI, V.; CATTANI, E. Stability, accuracy and efficiency of a semi-implicit method for three-dimensional shallow water flow. *Computers & Mathematics with Applications*. v.27, n.4, p. 99-112, 1994.
- 3 CASULLI, V.; LANG, G. *Mathematical Model UnTrim*. Hamburg: Federal Waterways Engineering and Research Institute, 2002. 77p. Validation Document.



- 4 CASULLI, V.; WALTERS, R. A. An unstructured grid, three dimensional model based on the shallow water equation. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*. v.32, p. 331-348, 2000.
- 5 CASULLI, V.; ZANOLLI, P. Semi-implicit numerical modeling of nonhydrostatic free-surface flows for environmental problems. *Mathematical and Computer Modelling*. v.36, n.9-10, p. 1131-1149, 2002.
- 6 CASULLI, V.; ZANOLLI, P. A Three-Dimensional Semi-Implicit Algorithm for Environmental Flows on Unstructured Grids. In: *Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics VI*. 1998, Institute for Computational Fluid Dynamics, 1998.
- 7 CELEBIOGLU, T. K.; PIASECKI, M. Development of a 3D Numerical Model for the Delaware Estuary Using an Unstructured Finite Difference Grid. In: *7th International Conference for Estuarine and Coastal Modeling*. 2003, Monterey, 2003.
- 8 CHENG, R. T.; CASULLI, V. Evaluation of UnTRIM model for 3D tidal circulation. In: *7th International Conference on Estuarine and Coastal Modeling*. 2001, St. Petersburg. Anais... St. Petersburg. 2001.
- 9 GHONIEM, A. F.; ORAN, E. O.; BORIS, J. P. Numerical Simulation of reactive flow. *Combustion and Flame*. v.74, n.3, p. 311-312, 1988.
- 10 JORGENSEN, S. E. *Fundamentals of Ecological Modelling*. Amsterdam: Elsevier, 1994.
- 11 MACWILLIAMS, M. L.; STREET, R. L.; KITANIDIS, P. K. Modeling Floodplain Flow on Lower Deer Creek, CA. In: *Second International Conference on Fluvial Hydraulics*. 2004, Italy. Anais... Italy. 2004.
- 12 MOLEN, J. V. D.; STELLING, G. S. A non-orthogonal finite difference method for shallow water flows. IN: MOLEN, J. V. D. *Tides in a Salt Marsh*. Netherlands: Fedrobuk, BV. Enshhede, 1997. p. 29 - 59.
- 13 PEREIRA, R. S. *Processos que regem a qualidade da água da Lagoa dos Patos, segundo o modelo Delft3D*. 2003. 149p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica) - Fundação Universidade Federal do Rio Grande, 2003.
- 14 ROSMAN, P. C. C. Um sistema ambiental de hidrodinâmica ambiental. IN: SILVA, R. C. V. *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos 5*. Rio de Janeiro: ABRH, 2001. p. 1 - 163.
- 15 SCHETTINI, E. B. C. *Modelo matemático bidimensional de transporte de massa em elementos finitos com ênfase em estuários*. 1991. 90p. Dissertação (Mestrado em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental) - universidade federal do rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1991.
- 16 SCHONNOR, J. *Environmental Modeling*. Wiley Interscience, 1996.
- 17 SOMLYÓDY, L.; HENZE, M.; KONCSOS, L.; RAUCH, W.; REICHERT, P. *River water quality modeling*. IAWQ Biennial International Conference. v.21-26, 1998.
- 18 WIERGERT, R. G. Simulation models of ecosystems . IN: *Annual Review of Ecology and Systematics*. 1975. p. p. 311 - 338.
- 19 REBAY, S. Efficient Unstructured Mesh Generation by Means of Delaunay Triangulation and Bowyer-Watson Algorithm. *Journal of Computational Physics*. v.106, n.1, p. 125-138, 1993.
- 20 SHEN, J.; ZHANA, K.; XIAO, C. Improved Storm Surge Model Prediction Using a High Resolution Unstructured Grid. In: *8th Estuarine and Coastal Modelling*. 2004, ASCE, 2004.
- 21 SIGNELL, R. P.; JENTER, H. L.; BLUMBERG, A. F. Predicting the Physical Effects of Relocating Boston's Sewage Outfall. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*. v.50, n.1, p. 59-72, 2000.
- 22 STELLING, G. S. Lagrangean advection in unstructured grids with improved conservation properties. In: *8th Estuarine and Coastal Modelling*. 2004, ASCE, 2004.

- 23 WALSTRA, L. C., VANH RIJN, L. C., BLOGG, H. & VAN ORMONDT, M. 2001. *Evaluation of a hydrodynamic area model based on the COAST3D data at Teignmouth 1999*. TR121-EC MAST Project No. MAS3-CT97-0086, HR Wallingford, UK.
- 24 WATANABE, M.; HARLEMAN, D. R. F.; VASILIEV, O. F. Two and three-dimensional mathematical models for lakes and reservoirs. IN: *Mathematical Modeling of Water Quality: Streams, Lakes and Reservoirs*. New York: John Wiley & Sons, 1983. p. 274 - 336.
- 25 ZHANG, Y.; BAPTISTA, A. M. A cross-scale model for 3D baroclinic circulation in estuary-plume-shelf systems: I. Formulation and skill assessment. *Continental Shelf Research*. v.24, n.18, p. 2187-2214, 2004.