

Aplicações do Modelo de Elementos Finitos de Propagação de Ondas, EpE_CG a Zonas Portuárias: Sines e Vila do Porto

Conceição J.E.M. Fortes¹, Liliana Pinheiro¹, J. Leonel M. Fernandes²

¹Laboratório Nacional de Engenharia Civil – LNEC, Lisboa, Portugal - jfortes@lnec.pt,
lpinheiro@lnec.pt,

²Departamento de Engenharia Mecânica - IST, Lisboa, Portugal - leonel@dem.ist.utl.pt

RESUMO

Nesta comunicação, apresenta-se o modelo de elementos finitos EpE_CG, para a propagação e deformação de ondas marítimas em zonas costeiras e portuárias. Este modelo numérico baseia-se numa formulação elemento por elemento para a equação de declive suave. Aliada a esta formulação, aplica-se o método iterativo dos Gradientes Conjugados com pré-condicionamento. Para acelerar a convergência são usados três pré-condicionadores: o primeiro por uma matriz diagonal, o segundo com uma factorização LDL¹ incompleta e o terceiro de Gauss-Seidel simétrico. Estes pré-condicionadores usam diferentes quantidades adicionais de memória e têm também desempenhos distintos. No presente trabalho, avalia-se o desempenho da formulação EpE, do método iterativo e dos pré-condicionadores em casos de teste envolvendo malhas até dois milhões de nós e aplicados em duas zonas portuárias: Sines (na costa Sul de Portugal) e Vila do Porto (na ilha de Santa Maria, nos Açores). Para cada caso, são contabilizados o número de iterações, o tempo de CPU e a memória necessária aos cálculos. Observa-se, também, o crescimento do número de iterações necessário para a convergência do método, com o número de equações. Finalmente, analisa-se o comportamento do método iterativo com o pré-condicionador de Gauss-Seidel à variação do período da onda.

PALAVRAS-CHAVE: Modelação numérica, Método dos elementos finitos, Formulação elemento por elemento, Pré-condicionadores, Propagação e deformação de ondas, Zonas portuárias e costeiras, *multigrid* algébrico.

1. INTRODUÇÃO

Muitos dos principais processos associados à transformação de ondas em zonas costeiras podem ser descritos pela equação elíptica de declive suave, [2], que tem em conta os efeitos combinados da refacção, difracção e reflexão de ondas marítimas propagando-se em fundos de inclinação suave, como os que ocorrem em portos, baías e zonas costeiras.

Desde há vários anos se têm desenvolvido modelos matemáticos que resolvem essa equação, ou variantes da mesma, por diferentes metodologias numéricas (por exemplo, método dos elementos finitos, método das diferenças finitas) e se têm mostrado assim adequados à realização de estudos de agitação e ressonância em portos, marinas ou zonas costeiras, em geral.

Um exemplo deste tipo de modelos, é o modelo DREAMS, [6], o qual resolve a equação de declive suave pelo método dos elementos finitos e o sistema de equações resultante, é resolvido por uma variante do método directo de Crout aplicado a matrizes simétricas esparsas

em skyline. Este modelo, que já foi utilizado com êxito em várias situações apresenta algumas limitações quando se aplica a grandes áreas costeiras.

Com efeito, nas diferentes aplicações deste modelo a zonas de diferentes profundidades é necessário garantir um número mínimo de pontos (8 a 10 pontos) por comprimento de onda em todo o domínio de modo a ter confiança nos resultados do modelo. Este facto condiciona significativamente a aplicação do modelo a áreas muito extensas, isto é, em grandes zonas costeiras. Ora, principalmente nos estudos de agitação envolvendo períodos curtos, esta condição conduz a malhas de elementos finitos com um grande número de pontos, o que, conseqüentemente, exige um grande esforço computacional (memória e tempo de cálculo) para a resolução do correspondente sistema de equações. O esforço computacional para resolução destes sistemas inviabiliza muitas vezes a análise do problema.

Para minimizar esta limitação do modelo e torná-lo mais eficaz do ponto de vista de redução da memória de computador usada, foi desenvolvido um modelo de elementos finitos, baseado numa formulação denominada elemento por elemento (EPE), [8] que resolve a equação de declive suave de Berkhoff [2]. Este modelo é uma extensão de um outro modelo, também de elementos finitos de Vaz dos Santos [18] e Macedo [13] que se baseia na equação de águas pouco profundas. Neste tipo de formulação EPE, não há a montagem da matriz global do sistema o que conduz a uma grande economia nos requisitos de armazenamento. O método para a solução do sistema de equações é uma versão com pré-condicionamento do método dos Gradientes Conjugados (MGC), [7]. O modelo assim construído foi aqui designado por modelo EPE_CG.

O sistema de equações é caracterizado por ter uma matriz complexa simétrica esparsa e normalmente de grande dimensão, sobretudo em estudos de ondas curtas. Os requisitos de memória variam linearmente com o número de elementos, o que se traduz numa economia substancial na memória utilizada. Aliada a esta formulação, aplica-se o método iterativo dos Gradientes Conjugados com pré-condicionamento. Para acelerar a convergência são usados três pré-condicionadores: o primeiro por uma matriz diagonal, o segundo com uma factorização LDLt incompleta e o terceiro de Gauss-Seidel simétrico. Estes pré-condicionadores usam diferentes quantidades adicionais de memória e têm também desempenhos distintos.

Experiências anteriores efectuadas com este modelo numérico em estudos de agitação em zonas portuárias, [18], [5] e [4] mostraram que o modelo EpE_CG tem vantagens relativamente ao modelo que usa um método directo em skyline, devido à enorme redução de memória conseguida. Os exemplos utilizados envolviam malhas de elementos finitos com um número de nós inferior a 5 centenas de milhares de nós. Esta vantagem torna-se especialmente significativa para problemas de maior dimensão. Relativamente aos pré-condicionadores, verificou-se que o de factorização incompleta conduz a um menor tempo de cálculo face ao diagonal mas exige uma maior quantidade de memória adicional dependente do valor especificado de um parâmetro de patamar que nem sempre é fácil de fixar.

Na presente comunicação, estende-se o trabalho anterior considerando malhas até 1,5 milhões de nós sobretudo graças ao pré-condicionador de Gauss-Seidel simétrico, o qual, além de demonstrar um bom desempenho, usa uma quantidade de memória fixa. Uma outra importante motivação para a aplicação do método de Gauss-Seidel é que ele é um dos ingredientes fundamentais das técnicas de Multigrid Algébricas, enquanto que, o método dos gradientes conjugados é, nesse contexto (AMG), usado para uma iteração exterior.

O modelo EpE_CG é aplicado em estudos de propagação de ondas curtas em dois locais da costa portuguesa: Sines e Vila do Porto. Os dois casos correspondem a zonas portuárias, o primeiro na costa oeste de Portugal e o segundo na ilha de Santa Maria, nos Açores. Avalia-se o desempenho da formulação EpE, do método iterativo e dos pré-condicionadores nestes

casos de teste envolvendo diferentes malhas de elementos finitos. Cada domínio de cálculo é então discretizado com diversas malhas associadas a diferentes números de pontos por comprimento de onda. O número de nós das malhas assim construídas variou entre 167 000 e 1 500 000 nós, aproximadamente. Para cada malha, são contabilizados: o número de iterações, o tempo de CPU e a memória necessária aos cálculos e analisa-se o crescimento do número de iterações necessário para a convergência do método, com o número de equações. Estuda-se também o comportamento do método iterativo com o pré-condicionador de Gauss-Seidel face à variação do período da onda.

2. MODELO NUMÉRICO EPE_CG

2.1. Equação de declive suave

O modelo numérico EpE_CG, [18], [5] e [4], resolve a equação de declive suave, [2], utilizando o método dos elementos finitos. A equação base do modelo e as correspondentes condições de fronteira são dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(cc_g \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \right) + k^2 cc_g \eta = 0, (j=1,2) \text{ em } V \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} - ik\eta = f, \text{ em } S_1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = ik\alpha_{abs}\eta, \text{ em } S_2. \quad (3)$$

em que η é a elevação da superfície livre, c é a velocidade de fase, c_g é a velocidade de grupo, k o número de onda, f é um valor determinado em função das características da onda incidente (considerando a condição de fronteira de geração radiação na fronteira aberta S_1) e α_{abs} um coeficiente de absorção em fronteiras sólidas S_2 ; x_j ($j=1,2$) são as coordenadas em relação a um referencial, n é a coordenada na direcção normal às fronteiras S_1 e S_2 . V é o domínio a estudar.

Esta equação permite descrever os efeitos combinados da refacção, da difracção e reflexão de ondas lineares harmónicas propagando-se em fundos de inclinação suave, como os que ocorrem em portos, baías e zonas costeiras.

2.2. Aplicação do Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é usado para resolver a equação de declive suave com as condições de fronteira dadas. Este método é baseado na aplicação da formulação fraca à equação de declive suave. A formulação fraca é obtida primeiramente através da ponderação, no domínio V do resíduo da equação e das condições de fronteira por uma função peso, W , e posteriormente pela integração do resíduo no domínio. A aplicação do método de Galerkin à equação anterior conduz, após alguns passos intermédios, ao seguinte sistema de equações a nível de cada elemento:

$$\left[K^{(e)} - k^2 cc_g M^{(e)} \right] \eta^{(e)} = F^{(e)} \quad (4)$$

em que

$$K^{(e)} = \int_V cc_g \frac{\partial N^T}{\partial x_j} \frac{\partial N}{\partial x_j} dV, (j=1,2) \quad (5)$$

$$M^{(e)} = \int_V N^T N dV \quad (6)$$

$$F^{(e)} = \int_{S_1} N^T (Nf^{(e)}) dS - ik \int_{S_2} \alpha_{abs} N^T N dS \quad (7)$$

sendo $N_i = N_i(x_1, x_2)$ as funções de forma em cada nó i do elemento e e $\eta_i^{(e)}$ os valores das incógnitas. Nas Eqs. (5) a (7), N^T é a transposta do vector N .

2.3. Resolução do sistema de equações

2.3.1. Formulação elemento a elemento

No modelo EpE_CG, o sistema indicado na Eq. (4) pode ser escrito da seguinte forma:

$$A^{(e)} \eta^{(e)} = F^{(e)}, \quad (8)$$

em que

$$A^{(e)} = K^{(e)} - k^2 c c_g M^{(e)}. \quad (9)$$

Neste tipo de formulação, designada por formulação elemento por elemento (EPE), não se efectua a montagem da matriz global do sistema. Durante todo o processo de solução, trabalha-se com as matrizes de cada elemento armazenadas num vector (*array*). Deste modo, as posições que na matriz global seriam ocupadas por valores nulos, são economizadas. Isto significa que a quantidade de memória necessária é proporcional ao número de elementos. Sendo assim, a memória de armazenamento cresce linearmente com o número de equações, N . Isto contrasta com o que acontece no caso do armazenamento em *skyline* da matriz que cresce aproximadamente com $N^{3/2}$ para uma malha quadrada. Para problemas de grande dimensão, quando a memória computacional é limitada, o armazenamento em *skyline* torna-se proibitivo. Por outro lado, a utilização excessiva de memória virtual torna os programas muito lentos. A formulação EPE é mais adequada se o sistema de equações for resolvido por um método iterativo, pois com os métodos directos é necessário montar a matriz de rigidez global. No caso do método iterativo, só é necessário um produto matriz-vector mais a resolução de um sistema mais simples, em cada iteração.

Os coeficientes fora da diagonal da matriz complexa simétrica do elemento são armazenados num vector enquanto que os seus coeficientes diagonais são assemblados e guardados numa matriz (*array*) diagonal global. Para um elemento triangular de matriz simétrica, apenas três coeficientes fora da diagonal são armazenados por triângulo. Tal conduz a uma importante economia no armazenamento da matriz. Para uma malha composta por triângulos, apenas é necessário guardar 3 vezes o número de elementos mais um vector com a dimensão igual ao número de equações (para guardar a diagonal global). Como o número de triângulos é aproximadamente o dobro do número de equações, N , a memória total para guardar a matriz simétrica é de, sensivelmente, 7 vezes o número de equações ($7N$).

Na implementação da formulação EPE com pré-condicionamento há que ter em conta os seguintes aspectos: o produto matriz-vector e a construção da matriz pré-condicionada. O produto matriz-vector é calculado adicionando-se a contribuição dos coeficientes fora da diagonal dos elementos com a contribuição da multiplicação pela diagonal.

2.3.2. Equilibragem prévia da matriz por escalamento diagonal

As matrizes geradas pelo MEF nestas aplicações requerem uma conveniente operação de

equilibragem ou escalamento. Para preservar a simetria usa-se um escalamento simétrico por matrizes diagonais de modo a que a matriz modificada tenha todas as entradas diagonais unitárias. Esta operação prévia é de uma grande importância e utilidade em qualquer processo iterativo e é, ela própria, um pré-condicionamento revelando-se também essencial para o bom desempenho tanto da factorização incompleta como do pré-condicionador de Gauss-Seidel descritos adiante.

2.3.3. Pré-condicionadores

O método iterativo dos gradientes conjugados, [7], só tem interesse prático se for usado com um pré-condicionamento. Uma descrição deste método com pré-condicionamento pode ser encontrada em [1] e [9]. O objectivo do pré-condicionamento é modificar, neste caso implicitamente, as propriedades espectrais da matriz do sistema de equações de modo a obter-se uma convergência mais rápida e, conseqüentemente, um desempenho atractivo do ponto de vista prático. Isso consegue-se com a solução de um sistema auxiliar em cada iteração, $Mz = r$, onde M substitui A de um modo computacionalmente mais favorável e permite, dado um vector de resíduo r , obter um vector de correcção (ou direcção de pesquisa) z para actualizar a aproximação corrente.

Nesta comunicação, testam-se três tipos de pré-condicionamento: (1) pré-condicionamento diagonal; (2) pré-condicionamento por factorização $M = LDL^t$ incompleta numa estrutura de dados CSR (*compressed sparse row*) e (3) Gauss-Seidel simétrico.

2.3.3.1. Pré-condicionador diagonal

O pré-condicionamento diagonal é construído com as entradas da diagonal da matriz global A e foi o primeiro pré-condicionamento implementado no modelo original, [18]. Actualmente, como se usa o escalamento prévio pela diagonal, $M = I$, $z = r$, a matriz A já está explicitamente pré-condicionada pela diagonal. Neste trabalho ainda se manteve a memorização elemento-por-elemento para se fazer a multiplicação matriz-vector, quando se usa este pré-condicionamento. No entanto, o pré-condicionador diagonal também pode ser implementado quando a matriz global é guardada em CSR. Neste caso há vantagens em rapidez e na utilização de memória.

2.3.3.2. Factorização Aproximada em CSR

Desenvolveu-se uma rotina para calcular a factorização LDL^t usando uma estrutura de dados apropriada para matrizes esparsas. Com esta estrutura CSR podemos guardar em memória apenas os coeficientes não nulos da matriz que quisermos. Usa-se um patamar (valor de referência definido pelo utilizador) de comparação e os coeficientes que tiverem em módulo um valor inferior a este patamar são considerados nulos e descartados. Acontece que a maioria dos coeficientes que habitualmente preenche a estrutura *skyline* está abaixo deste patamar (ascende a vários milhões nos exemplos testados) pelo que pode ser descartada retendo-se apenas um número médio de algumas dezenas em cada linha.

Calculam-se todos os coeficientes linha-a-linha e só depois de obtido o seu valor numérico é que se decide, por comparação com o patamar, quais é que vão ser ignorados ou guardados no formato comprimido em CSR.

Como se vão desprezando alguns coeficientes pequenos ao longo das linhas da matriz, os coeficientes seguintes vão sendo calculados e ajustados a essas perturbações introduzidas na factorização. Isto significa que vamos obter uma factorização perturbada da matriz A mas com características espectrais muito próximas das de A .

Nesta factorização há uma série de produtos internos escalados pela diagonal de linhas

distintas da matriz triangular inferior L . Na determinação de um coeficiente de L intervém a linha corrente e uma linha anterior. Como a maioria dos coeficientes ao longo de uma linha é descartada, esta factorização torna-se mais rápida do que a completa devido à redução de termos (e operações) conseguida no cálculo dos produtos internos visto que as linhas anteriores já foram comprimidas.

Os próprios coeficientes da diagonal D são obtidos com os coeficientes de L já ajustados, isto é, com a compressão já feita. Este aspecto é importante pois os coeficientes da diagonal D têm um papel decisivo no pré-condicionamento.

Deve-se mencionar que esta factorização é calculada apenas uma vez e antes de se iniciar o ciclo iterativo. Os factores assim obtidos são depois usados em cada iteração para se resolver um sistema auxiliar que permite extrair, do vector de resíduo corrente, um vector de correcção para produzir uma nova aproximação.

2.3.3.3. Pré-condicionador de Gauss-Seidel

O pré-condicionador de Gauss-Seidel simétrico usa a mesma estrutura de dados em CSR anteriormente referida mas não requer uma eliminação de Gauss prévia porque opera com os coeficientes originais da matriz. Para se operar na estrutura CSR é, no entanto, necessário fazer uma assemblagem das matrizes globais (operação muito rápida) e, conseqüentemente, descartar a estrutura EpE. Para tornar o método ainda mais competitivo, foi usada uma implementação de Eisenstadt, conhecida na literatura da especialidade. Explorando a simetria das matrizes, a estrutura CSR guarda cerca de $4N$ coeficientes complexos de 16 bytes. Para além disso, necessita de mais dois *arrays* de inteiros de 4 bytes, um de dimensão $4N$, que guarda ponteiros e outro de dimensão N . Há pontos que merecem ser realçados: tal como no armazenamento EpE, [8], [4], [5], a quantidade de memória usada cresce linearmente com o número de equações e, se contarmos também os inteiros, é comparável à usada para o pré-condicionador diagonal. No entanto, tal como sucede com o pré-condicionador diagonal e ao contrário do de factorização incompleta, o pré-condicionador de Gauss-Seidel simétrico não necessita de memória adicional. Observa-se também que a multiplicação matricial em CSR é mais rápida do que em EpE.

2.4. **Dados e resultados do modelo EpE_CG**

Os dados a fornecer ao modelo são: as características da agitação incidente (período e direcção da onda); os coeficientes de reflexão em cada troço da fronteira do domínio de cálculo; as características da malha de elementos finitos, com que foi discretizado o domínio em estudo; e o valor do patamar, associado ao pré-condicionamento de factorização incompleta.

As condições de fronteira implementadas no modelo são: as condições de radiação, que permitem a saída de ondas do domínio; as condições de geração e radiação combinadas, como as relativas a fronteiras abertas e que permitem a entrada da agitação incidente e a saída das perturbações geradas no domínio; e as condições de reflexão (total ou parcial), referentes aos contornos sólidos da zona em estudo (praias, falésias, molhes, entre outros).

O modelo calcula índices de agitação ou coeficientes de amplificação (H/H_0 , relação entre a altura de onda no ponto do domínio de cálculo, H , e a altura de onda à entrada do domínio de cálculo, H_0) e direcções de propagação da onda (Θ).

É de notar que é necessário garantir um número mínimo de pontos (8 a 10 pontos) por comprimento de onda em todo o domínio de modo a ter confiança nos resultados numéricos do modelo EpE_CG.

3 - GERADOR DE MALHAS

3.1 - Introdução

O gerador de malhas GMALHA [15] foi desenvolvido para a construção de malhas triangulares não-estruturadas usadas por modelos de elementos finitos de propagação de ondas marítimas.

Para uma dada zona costeira, GMALHA gera, a partir da fronteira e da batimetria dessa zona, uma malha triangular otimizada. A fronteira, que por vezes é muito complexa, inclui a linha de costa englobando infra-estruturas portuárias, praias, marinas, ilhas, etc. Com base nessa fronteira e na batimetria limitada por ela, GMALHA, gera primeiramente uma malha triangular grosseira que preenche o domínio de cálculo. A malha é, em seguida, sujeita a um refinamento local condicionado pela batimetria ao mesmo tempo que são feitos diversos melhoramentos, nomeadamente, o controlo de uniformidade dos elementos, a alteração do posicionamento de pontos para correcção de ângulos e a redistribuição de lados para correcção de valências.

Para a geração da malha, é utilizado o método da frente móvel ou *Advancing Front Method*. Este método teve origem nos trabalhos pioneiros de Lo, Peraire, e Lohner, [10], [11], [12], [14], entre outros. O GMALHA utiliza quatro algoritmos de pós-processamento: o refinamento local condicionado à batimetria, a filtragem Laplaciana, correcção de ângulos e correcção de valências.

Alguns testes preliminares mostraram que é necessário aplicar um algoritmo de renumeração dos nós da malha de modo a tornar viável a aplicação tanto do método directo como do método iterativo pré-condicionado pela factorização incompleta. A renumeração dos nós é feita de modo a minimizar a diferença nodal para a totalidade dos nós que sejam partilhados por dois ou mais elementos.

3.2 - Interface com o utilizador

A interface do GMALHA [15] foi desenvolvida em Microsoft Excel™ e pode ser acedida a partir da interface do módulo DREAMS no SOPRO, [16] e [17], pacote informático de previsão da ondulação em portos.

O GMALHA é composto por 3 folhas de cálculo. Na primeira folha de cálculo, designada por “front_ini”, são introduzidas as coordenadas da fronteira do domínio a discretizar. Na segunda folha de cálculo, designada por “fronteiras”, visualiza-se o contorno da fronteira e podem redistribuir-se os pontos uniformemente pela fronteira, se se desejar. Na Figura 2, a título de exemplo, podem ver-se as fronteiras utilizadas para o porto de Vila do Porto, na ilha de Santa Maria, Açores.

Na terceira folha de cálculo são introduzidos os parâmetros para a criação da malha. Esta folha contém ainda botões que permitem accionar diversas tarefas, ver Figura 1.

Os parâmetros a definir são:

- O nome da malha;
- O NPPCO mínimo;
- O período mínimo para o qual deve ser criada a malha;
- A distância de tolerância, i.e., a distância mínima a garantir entre os pontos a gerar e a fronteira de modo a poder ser criado um novo triângulo;
- O número máximo de iterações para a geração da malha. No entanto, por vezes, esse número é excedido e o processo de geração da malha deve ser terminado. Quando isto acontece, deve tentar-se alterar a distância de tolerância ou alterar a posição de alguns pontos da fronteira.

- Um parâmetro de escrita que determina se se escreve nos ficheiros todos os passos de criação da malha ou não;
- Um parâmetro de refinamento que determina se se refina a malha de acordo com a batimetria;

Antes de iniciar o processo de criação da malha deve proceder-se à ordenação dos pontos da batimetria de modo a ter abcissas e ordenadas crescentes. Esta ordenação é um processo que pode ser demorado, se a batimetria tiver muitos pontos, mas basta ser efectuada uma vez.

Existe ainda a opção de se criarem várias malhas, bastando para isso definir-se os valores mínimos, máximos e o intervalo regular, designado por “step”, do NPPCO mínimo e dos períodos da onda, Figura 1.

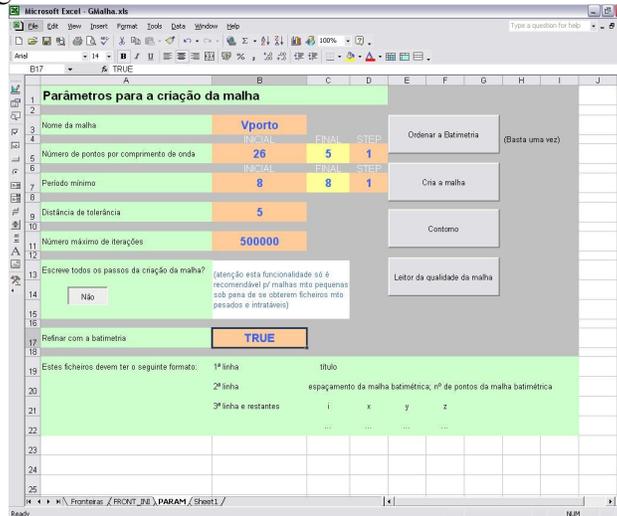


Figura 1 – Parâmetros da criação da malha.

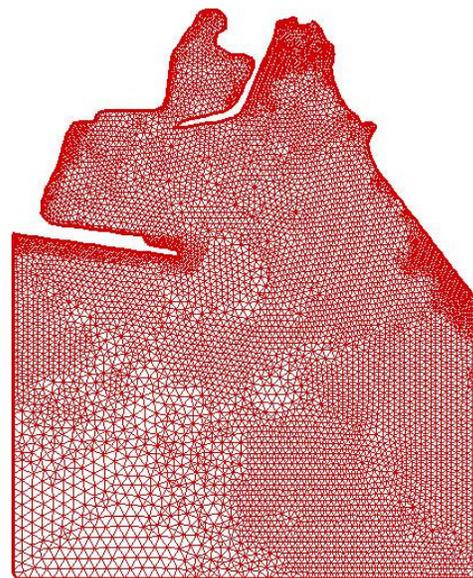
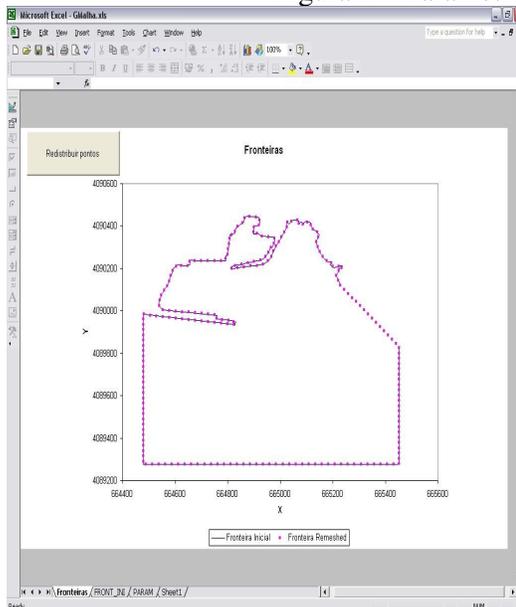


Figura 2 – a) Fronteiras inicial e redistribuída; b) Malha de elementos finitos.

As malhas geradas com o GMALHA, permitem obter melhores resultados e melhores desempenhos do modelo elíptico quando o domínio é de grande extensão, uma vez que o refinamento local permite reduzir o número de elementos nas zonas mais profundas e, conseqüentemente, reduzir os tempos de CPU enquanto a renumeração dos nós da malha permite diminuir a memória utilizada pelo modelo numérico DREAMS.

4. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

4.1. Introdução

Para avaliar o comportamento e eficácia do modelo EpE_CG e dos pré-condicionadores implementados, utilizaram-se dois casos de teste de zonas portuárias reais, um na costa continental portuguesa, o porto de Sines, e outro, na ilha de Santa Maria nos Açores, o porto de Vila do Porto.

Para cada caso, o respectivo domínio de cálculo foi discretizado por diferentes malhas de elementos finitos associadas a diferentes números de pontos por comprimento de onda. A geração destas malhas foi feita por refinamento local progressivo, alternado com *smoothing* de Laplace, sendo a densidade local final imposta pelo número mínimo de pontos por comprimento de onda, especificado pelo utilizador.

O modelo EpE_CG foi aplicado a cada uma das malhas consideradas, determinando-se o número de iterações, o tempo de CPU e a memória necessária aos cálculos, para cada um dos três pré-condicionamentos implementados. A comparação entre resultados permite aferir qual o pré-condicionador mais eficiente nestes casos de teste.

Além disso, compararam-se esses resultados com os correspondentes obtidos com um método directo, [3] e [5].

Finalmente, analisa-se também, o comportamento do pré-condicionador de Gauss-Seidel simétrico face à variação do período da onda. Para cada teste de cálculo, e para a maior malha considerada, efectuam-se cálculos sistemáticos decrescendo o valor do período da onda, o que corresponde a diminuir o número de pontos por comprimento de onda.

Os cálculos foram efectuados numa estação de trabalho, cujas características são: CPU - Dual Core AMD Opteron 265 (4 processadores), memória - 8 Gb, SPECfp_rate2000=54.7.

4.2. Porto de Sines

O porto de Sines situa-se na costa oeste de Portugal, a cerca de 100 km a sul de Lisboa. Trata-se de um porto situado numa costa aberta e um dos poucos portos europeus de águas profundas, Figura 3. A batimetria da zona marítima adjacente ao porto de Sines está representada na Figura 3. Na batimétrica dos -100 m ZH está colocada uma bóia-ondógrafo onde são medidos diariamente os valores característicos da agitação marítima.

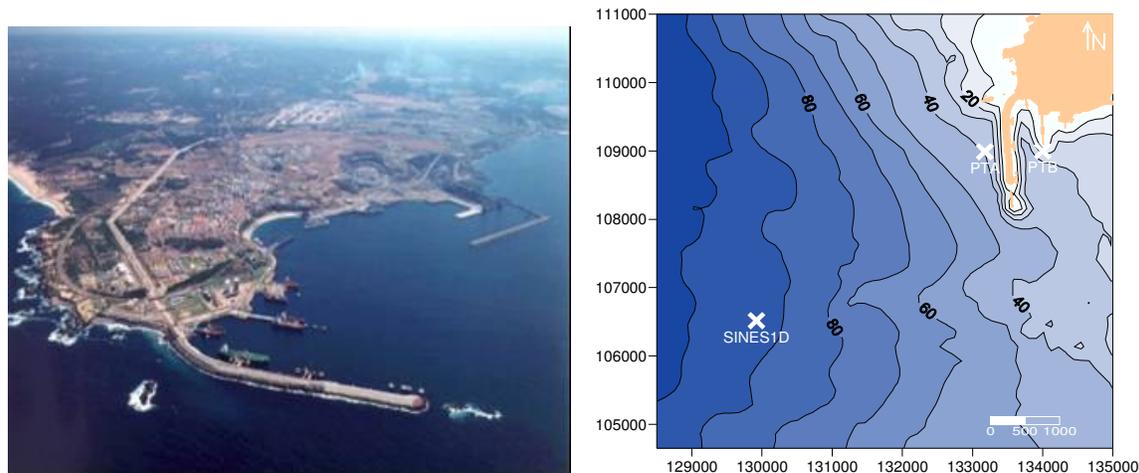


Figura 3. Porto de Sines. Domínio de cálculo e batimetria da região.

Para conhecer a agitação marítima no interior do porto de Sines, é necessário efectuar a propagação das características da agitação desde a zona em que há medições, isto é, a posição

da bóia-ondógrafo até à zona interior do porto. O domínio de cálculo assim estabelecido é de grandes dimensões.

Neste trabalho, pretende-se avaliar o comportamento do modelo EpE_CG e dos seus pré-condicionadores na modelação da agitação marítima em zonas portuárias de grandes dimensões e com batimetria e geometria complexas, como é o caso do Porto de Sines. Para tal, o modelo é aplicado a malhas diferentes cujo número mínimo de pontos por comprimento de onda é estabelecido pelo utilizador.

4.2.1. Condições de cálculo e resultados

Os cálculos com o modelo EpE_CG foram realizados para uma onda incidente de direcção SW e período 10 s, medida na bóia ondógrafo. O nível de maré considerado foi o nível médio anual de maré, à cota +2.00 m (Z.H.).

O domínio de cálculo, Figura 3, foi discretizado por cinco malhas de elementos finitos, cujo número mínimo de pontos por comprimento de onda variou entre 8 e 16, o que conduz a malhas com 167 486 e 1 018 984 pontos, respectivamente. As características destas malhas são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1. Porto de Sines. Características das malhas de elementos finitos.

Malha	NNos/L	N. Nós	N. Elem.
1	8	167486	331503
2	10	286047	567815
3	12	377259	749059
4	15	575583	1144488
5	16	1018984	2030334

As condições de fronteira, Figura 4, são a condição de geração-radiação na fronteira de entrada (A) e de radiação nas restantes fronteiras de saída (B). Para a malha 1 e as condições acima descritas, apresentam-se, a Figura 4, a título de exemplo, o diagrama de isolinhas de índices de agitação, obtidos com o modelo EpE_CG com pré-condicionamento diagonal, no domínio de estudo.

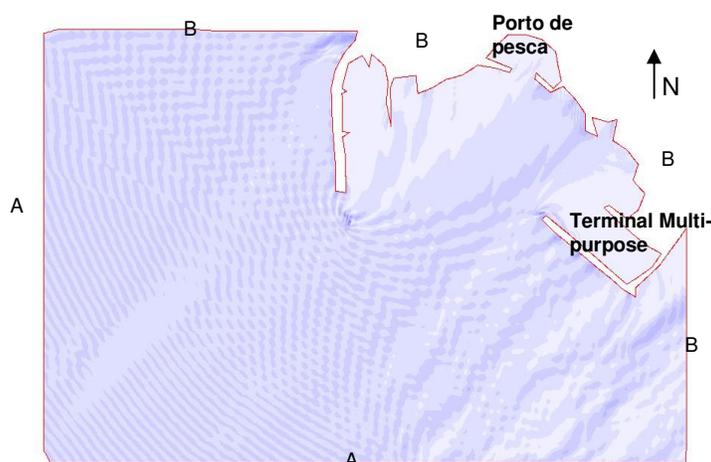


Figura 4. Índices de agitação. Cálculos efectuados com o modelo EpE_CG, para uma onda incidente de período $T=10$ s e direcção de SW.

Da Figura 4, observa-se uma redução da agitação marítima à medida que a onda se propaga do exterior para o interior da marina, embora a zona entre os dois molhes do porto apresente

ainda agitação considerável. Existem zonas mais protegidas como é o caso do porto de pesca e marina e do terminal multi-purpose.

Em termos de índices de agitação, os resultados obtidos aqui com o método do pré-condicionamento diagonal foram muito semelhantes em precisão aos obtidos com o método directo e aos obtidos com o pré-condicionamento com factorização incompleta e com Gauss-Seidel, nos casos em que a comparação foi possível.

4.2.2. Desempenho dos pré-condicionadores do modelo EpE_CG

Para avaliar a eficácia dos pré-condicionadores implementados (diagonal, factorização incompleta e Gauss-Seidel), efectuaram-se cálculos com o modelo EpE_CG para cada malha considerada e determinaram-se o tempo de CPU, as posições de memória e o número de iterações, correspondente a cada pré-condicionador e a cada malha, Tabela 2. Testaram-se valores do patamar entre 3×10^{-4} e 8×10^{-4} , correspondentes ao pré-condicionador de factorização incompleta. Para este pré-condicionador, apenas se indicam os resultados correspondentes ao primeiro valor para o patamar em que se verificou a não convergência do método. Na Tabela 2. indicam-se também, os valores obtidos com o método directo, sempre que foi possível efectuar os cálculos.

Na Figura 5 apresentam-se o tempo de CPU e as posições de memória, correspondente a cada pré-condicionador, para cada uma das malhas consideradas.

Da Tabela 2 e da Figura 5, verifica-se que, para os três pré-condicionadores, o método EpE_CG é convergente em quase todos os casos apresentados (apenas não se verificou a convergência no caso do pré-condicionador de factorização incompleta na malha 5). Nos casos em que foi possível correr o método directo, este foi mais rápido do que o método iterativo com o pré-condicionador diagonal para malhas inferiores a 286047 nós, mas mais lento nas restantes malhas. O método directo é sempre mais lento do que o pré-condicionador de factorização incompleta e de Gauss-Seidel.

Tabela 2. Porto de Sines. Posições de memória, CPU e número de iterações obtidos com o método iterativo EpE_CG e com o método directo.

Malha	Método	Pré-condicionador	Patamar	N. Iter.	Posições de memória	Memória (Mbytes)	CPU (s)
1 8 NNOS/L (167486 nós)	Directo	-	-	-	54870810	878	117
	Iterativo (EpE_CG)	Diagonal	-	2423	1172402	19	205
		Gauss-Seidel	-	2228	669944	11 (14)	102
		Factorização Incompleta	4x10 ⁻⁴	2	10191440	163	30
			5x10 ⁻⁴	10	8791286	141	29
			6x10 ⁻⁴	16	7755376	124	28
			7x10 ⁻⁴	20	6992710	112	27
8x10 ⁻⁴	24		6393911	102	26		
2 10 NNOS/L (286047 nós)	Directo	-	-	-	116466112	1863	293
	Iterativo (EpE_CG)	Diagonal	-	2527	2002329	32	375
		Gauss-Seidel	-	2125	1144188	18 (24)	164
		Factorização Incompleta	3x10 ⁻⁴	15	17159770	275	71
			4x10 ⁻⁴	35	14302144	229	72
			5x10 ⁻⁴	116	12351097	198	107
			6x10 ⁻⁴	243	10987962	176	158
			7x10 ⁻⁴	550	9972702	160	291
8x10 ⁻⁴	2098		9214688	147	960		
3 12 NNOS/L (377259 nós)	Directo	-	-	-	174108777	2786	538
	Iterativo (EpE_CG)	Diagonal	-	1608	2640813	42	325
		Gauss-Seidel	-	1183	1509036	24 (32)	122
		Factorização Incompleta	3x10 ⁻⁴	43	18001478	288	104
			4x10 ⁻⁴	177	15196464	243	172
			5x10 ⁻⁴	769	13385724	214	489
			6x10 ⁻⁴	3038	12107831	194	1670
			7x10 ⁻⁴	nc	11140538	178	nc
8x10 ⁻⁴	nc		nc	nc	nc		
4 15 NNOS/L (557583 nós)	Directo	-	-	-	345875144	5534	1414
	Iterativo (EpE_CG)	Diagonal	-	2428	4029081	65	808
		Gauss-Seidel	-	1685	2302332	37 (47)	266
		Factorização Incompleta	3x10 ⁻⁴	268	27645821	442	438
			4x10 ⁻⁴	2044	23114202	370	1987
			5x10 ⁻⁴	nc	20266985	324	nc
6x10 ⁻⁴	nc	nc	nc	nc			
5 17 NNOS/L (1 018 984 nós)	Directo	-	-	-	781898006	12510	FM
	Iterativo (EpE_CG)	Diagonal	-	2601	7132888	114	1607
		Gauss-Seidel	-	1339	4075936	65 (86)	375
		Factorização Incompleta	3x10 ⁻⁴	nc	40355945	646	nc

FM – Falta de memória;

nc – não convergiu ao fim de 6001 iterações

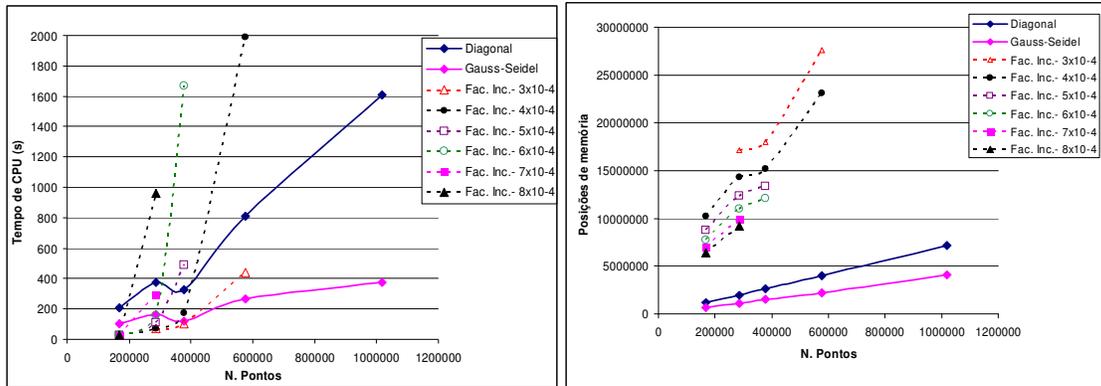


Figura 5 - Porto de Sines. Tempo de CPU e posições de memória com o método iterativo EpE_CG, para diferentes pré-condicionadores e malhas de elementos finitos.

Em termos de memória necessária aos cálculos, verifica-se que o método EpE_CG apresenta claras vantagens face ao método directo, qualquer que seja o pré-condicionador considerado. Com efeito, a memória associada ao método directo, para os casos em que foi possível correr, foi de 54,8, 116 e 174 milhões de complexos em precisão dupla, enquanto que, o método iterativo EpE_CG requer significativamente menos. Trata-se de uma enorme vantagem do modelo EpE_CG, porque permite a aplicação do modelo a muito maiores áreas costeiras, dada a reduzida memória que necessita. Dos pré-condicionadores testados, verifica-se que:

- A memória associada aos pré-condicionadores de Gauss-Seidel e diagonal é comparável entre si mas favorável ao primeiro devido às diferenças na implementação. Estes pré-condicionadores usam uma quantidade de memória fixa e muito inferior à correspondente ao de factorização incompleta. Note-se que na Tabela 2 para o pré-condicionador de Gauss-Seidel encontra-se apenas indicado o número de $4N$ coeficientes complexos (de 16 bytes) a guardar no armazenamento em CSR. Na coluna ao lado contabilizou-se também (os valores estão entre parêntesis) a memória correspondente a dois *arrays* de inteiros, um de dimensão $4N$, que guarda ponteiros e outro de dimensão N ;
- Em termos de tempo de CPU:
 - Para um número de equações inferior a 500000, o pré-condicionamento mais eficiente em termos de CPU é o pré-condicionador de factorização incompleta para certos valores do patamar que se podem considerar óptimos;
 - Para um número de equações superior a 500000, o pré-condicionador de Gauss-Seidel é o mais eficaz. Note-se que este pré-condicionador não necessita a escolha de um patamar o que facilita muito a sua aplicação;
- Para o pré-condicionador de factorização incompleta, há um valor para o patamar que minimiza o tempo de CPU necessário aos cálculos, para cada malha considerada. Neste exemplo, o valor do patamar que conduziu à solução em menor tempo de CPU foi de: Malha 1: 8×10^{-4} ; Malhas 2, 3 e 4: 3×10^{-4} . Este pré-condicionador apresenta valores de memória sempre superiores aos restantes pré-condicionadores;
- O pré-condicionador de Gauss-Seidel não necessita da escolha de qualquer patamar e apresenta tempos de CPU competitivos com os da factorização incompleta principalmente para malhas com um número de nós superior a 500 000 nós. Além disso, a memória associada é da ordem de grandeza do pré-condicionador diagonal e bastante inferior à de factorização incompleta e cresce linearmente com o número de equações do sistema;
- O pré-condicionador diagonal apresenta tempo de CPU superiores aos restantes pré-condicionadores, mas a memória associada aos cálculos é da mesma ordem de grandeza

do que do pré-condicionador de Gauss-Seidel e significativamente menor do que a de factorização incompleta.

Do exposto, considera-se que o método mais eficiente é o método iterativo com pré-condicionamento de Gauss-Seidel, pois requer menores tempos de CPU para a obtenção da solução, quando comparado com o método directo, com o pré-condicionador diagonal e com o pré-condicionamento de factorização incompleta (principalmente para malhas com um número de nós superior a 500 000) e uma importante poupança de memória quando comparado com o método directo e iterativo com factorização incompleta.

Finalmente, estudou-se o comportamento deste pré-condicionador à variação do período. Assim, para a malha com 1018984 nós, determinaram-se os tempos de CPU e o número de iterações correspondentes a períodos da onda de 10, 9, 8, 7, 6, 4, 2, 1 s, Tabela 3. Nesta tabela encontra-se indicado o número médio e mínimo de pontos por comprimento de onda, que caracteriza a malha em estudo.

Tabela 3. Porto de Sines. Tempo de CPU e número de iterações obtidos com o método EpE_CG utilizando o pré-condicionador de Gauss-Seidel.

Período da onda	NNos/L (med)	NNos/L_ (min)	N. Iter	CPU (s)
10	30	9	1339	375
9	25	8	1511	424
8	21	7	605	172
7	17	6	2021	566
6	13	4	2576	726
5	9	3	1744	498
4	-	-	-	-
2	-	-	-	-
1	-	-	-	-

Da Tabela 3, observa-se que, apenas para efeitos de convergência, é necessário garantir um número mínimo de pontos por comprimento de onda superior a 3, em todo o domínio de cálculo. Recorde-se que para efeitos de precisão dos resultados aquele número deve ser no mínimo, superior a 8.

4.3. Vila do Porto

O modelo EpE_CG foi aplicado na propagação e deformação de ondas marítimas na zona marítima adjacente ao porto de Vila do Porto. O porto de Vila do Porto situa-se na ilha de Santa Maria, sendo o único porto desta ilha. A zona portuária é abrigada por um molhe com cerca de 350 m de comprimento, com orientação aproximadamente E-W, Figura 6. No interior da zona portuária foi construído recentemente um cais para atracação dos navios que efectuam o transporte de passageiros entre ilhas - o cais ferry, o qual termina numa rampa, Figura 6. No interior deste porto, pretende-se construir um núcleo de recreio, na zona indicada na Figura 6.



Figura 6 - Porto de Vila do Porto. Localização do futuro núcleo de recreio.

4.3.1. Condições de cálculo e resultados

Os cálculos foram efectuados para uma onda incidente ao largo com direcção de Sul e período de onda de 4 s. O nível médio anual de maré, à cota +1.4 m (Z.H.) foi o considerado.

A Figura 7 a) apresenta a batimetria e o domínio de cálculo utilizado pelo modelo EpE_CG.

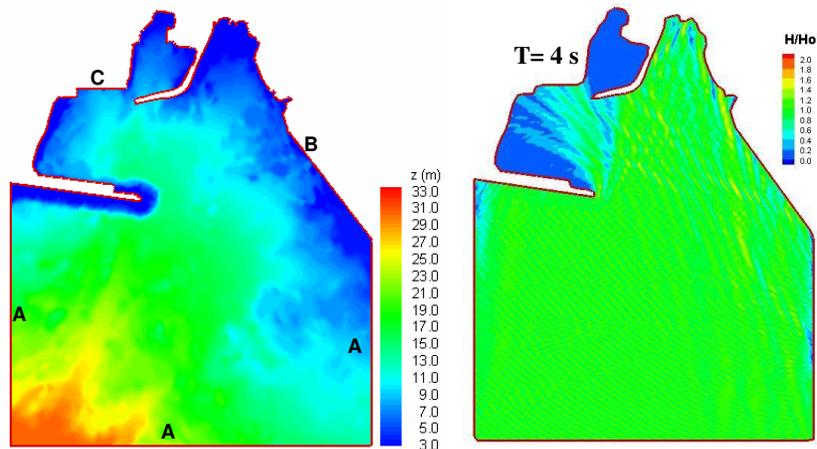


Figura 7. a) Batimetria e domínio de cálculo dos modelos EpE_CG; b) Índices de agitação ($T = 4s$, Sul).

Este domínio de cálculo foi discretizado por seis malhas de elementos finitos, cujo número mínimo de pontos por comprimento de onda (NNos/L) variou entre 8 e 16, o que conduziu a malhas com um número de nós entre 377 520 e 1 505 533, ver Tabela 4.

Tabela 4. Vila do Porto. Características das malhas de elementos finitos.

Malha	NNos/L	N. Nós	N. Elem.
1	8	377520	751682
2	10	465102	926778
3	12	536419	1068084
4	14	674602	1344035
5	15	994782	1984200
6	16	1505533	3004352

As condições de fronteira são a condição de geração-radiação nas fronteiras de entrada A e de radiação nas restantes fronteiras. Para o período de 4 s e direcção de onda incidente de Sul,

obtiveram-se os valores dos índices de agitação, no interior do porto de Vila do Porto, Figura 7 b). Nesta figura, pode observar-se que a agitação marítima proveniente do rumo S sofre uma redução à medida que se propaga para o interior do porto e especialmente dentro da marina. Em termos de índices de agitação, os resultados obtidos com o método do pré-condicionamento diagonal foram muito semelhantes aos obtidos com a factorização incompleta e de Gauss-Seidel.

Tabela 5. Vila do Porto. Memória, tempo de CPU e número de iterações obtidos com o método iterativo EpE_CG e o método directo, para diferentes pré-condicionamentos e malhas de elementos finitos.

Malha	Método	Pré-condicionador	Patamar	N. Iter.	Posições de memória	Memória (Mbytes)	CPU (s)
1 8 NNOS/L (377520 nós)	Directo	-	-	-	237851821	3806	991
	Iterativo (EpE_CG)	Diagonal	-	1441	2642640	42	278
		Gauss-Seidel	-	746	1510080	24 (32)	76
		Factorização Incompleta	3×10^{-4}	215	18894893	302	250
			4×10^{-4}	1102	16042237	257	763
5×10^{-4}	1772		14191304	227	2952		
2 10 NNOS/L (465102 nós)	Directo	-	-	-	330728506	5292	1521
	Iterativo (EpE_CG)	Diagonal	-	1430	3255714	52	351
		Gauss-Seidel	-	798	1860408	30 (39)	100
		Factorização Incompleta	3×10^{-4}	2	28679600	459	181
			4×10^{-4}	465	22611261	361	519
			5×10^{-4}	5509	19218024	307	4160
6×10^{-4}	nc		17068391	273	nc		
3 12 NNOS/L (536419 nós)	Directo	-	-	-	403347028	6454	2010
	Iterativo (EpE_CG)	Diagonal	-	868	3754933	60	300
		Gauss-Seidel	-	776	2145676	34 (45)	115
		Factorização Incompleta	3×10^{-4}	57	31532950	504	282
			4×10^{-4}	1172	24955312	399	1293
5×10^{-4}	nc		21187539	339	nc		
4 14 NNOS/L (674602 nós)	Directo	-	-	-	563079798	9009	3230
	Iterativo (EpE_CG)	Diagonal	-	2335	4722214	78	1026
		Gauss-Seidel	-	844	2698408	43 (57)	159
		Factorização Incompleta	3×10^{-4}	400	36550862	585	828
4×10^{-4}	nc		28981367	464	nc		
5 15 NOS/L (994782)	Directo	-	-	-	1020266469	16324	FM
	Iterativo (EpE_CG)	Diagonal	-	1313	6963474	111	812
		Gauss-Seidel	-	915	3979128	64 (84)	271
		Factorização Incompleta	2×10^{-4}	nc	49026411	784	nc
			3×10^{-4}	nc	38962670	623	nc
6 16 NOS/L (1505533nós)	Directo (DREAMS)	-	-	-	1894612485	30314	FM
	Iterativo (EpE_CG)	Diagonal	-	717	10538731	169	601
		Gauss-Seidel	-	1244	6022132	96 (126)	511
		Factorização Incompleta	2×10^{-4}	nc	70551121	1129	nc

FM – Falta de memória

nc – não convergiu ao fim de 6001 iterações

4.3.2. Desempenho dos pré-condicionadores implementados

Para as malhas consideradas, Tabela 4, determinaram-se o tempo de CPU, as posições de memória e o número de iterações, correspondente a cada pré-condicionador e valor de patamar associado, Tabela 5.

Testaram-se valores do patamar entre 3×10^{-4} e 6×10^{-4} , correspondentes ao pré-condicionador de factorização incompleta. Para este pré-condicionador, apenas se indicam os resultados correspondentes ao primeiro valor para o patamar em que se verificou a não convergência do método. Indicam-se também, na Tabela 5 os valores obtidos com o método directo, sempre que foi possível efectuar os cálculos.

Na Figura 8 apresentam-se o tempo de CPU e as posições de memória, correspondente a cada pré-condicionador, para cada uma das malhas consideradas.

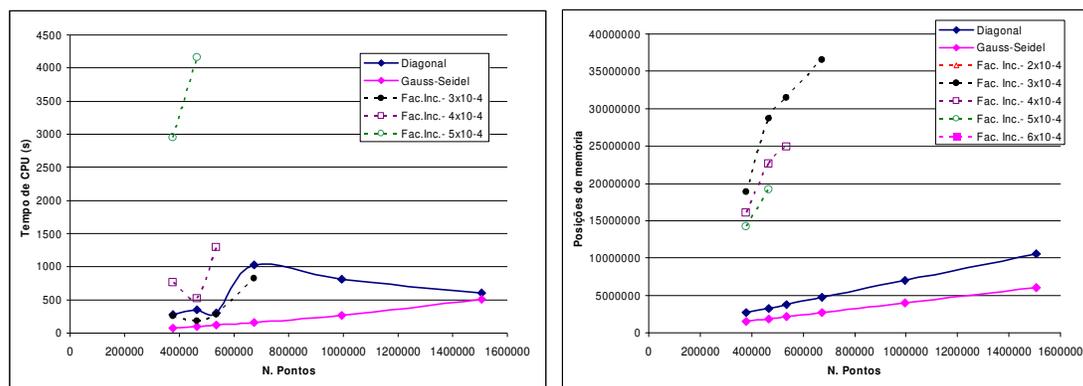


Figura 8. Vila do Porto. Tempo de CPU e posições de memória com o método iterativo EpE_CG.

Da Tabela 5 e da Figura 8 conclui-se que há sempre um método iterativo convergente, para os pré-condicionadores e as malhas de elementos finitos consideradas.

Verifica-se que o método EpE_CG conduz a uma significativa poupança de memória face ao método directo, para qualquer dos testes considerados. Para as malhas 5 e 6, não foi possível obter a solução com o método directo devido à grande quantidade de memória que é necessário usar e que excede a capacidade de endereçamento disponível neste momento na estação de trabalho. Comprova-se assim a clara vantagem de se usar métodos iterativos no modelo EPE_CG e, em especial, com os pré-condicionamentos de Gauss-Seidel e diagonal que podem ser aplicados em zonas de grande extensão envolvendo malhas com um número de nós superior a 1 500 000. Verifica-se que há também sempre um pré-condicionador associado ao método iterativo que apresenta tempos de CPU inferiores ao método directo.

Relativamente aos pré-condicionadores do método iterativo, verificou-se que com os pré-condicionamentos diagonal e Gauss-Seidel foi obtida sempre uma solução numérica, para qualquer dos testes efectuados, o que comprova a fiabilidade destes pré-condicionamentos. O mesmo já não sucedeu com o pré-condicionamento de factorização incompleta que, para as malhas acima de 1 milhão de nós, não foi possível obter qualquer solução numérica para os patamares testados. Em termos de tempo de CPU, o pré-condicionador de Gauss-Seidel apresenta tempos de CPU inferiores aos obtidos com o pré-condicionador de factorização incompleta e ao pré-condicionador diagonal, para qualquer das malhas testadas.

Quanto ao método iterativo com o pré-condicionador de factorização incompleta apresenta, para um valor de patamar de 3×10^{-4} e para as malhas de elementos finitos em que foi possível obter resultados, valores de tempo de CPU inferiores ao pré-condicionamento diagonal e ao método directo. Para este pré-condicionamento, o tempo CPU global da solução contempla

duas parcelas importantes: (1) a primeira é o tempo da factorização incompleta e (2) a segunda é o tempo das iterações propriamente ditas. As soluções que minimizam o tempo de CPU na factorização incompleta são as que requerem mais memória, neste caso, quando o valor do patamar foi 3×10^{-4} .

Em termos de memória, o pré-condicionador de factorização incompleta é o que requer mais comparativamente com os outros pré-condicionadores, no entanto, nos casos acima de 1 milhão de pontos, a limitação de memória torna-a inviável. Os pré-condicionadores diagonal e de Gauss-Seidel apresentam valores semelhantes para as posições de memória e são os que dão resultados em tempo útil.

Do exposto, conclui-se que o pré-condicionador de Gauss-Seidel é o mais eficaz pois requer o menor tempo de CPU (face aos restantes métodos e pré-condicionadores) e a memória necessária é da ordem de grandeza do método diagonal.

Na Tabela 6 apresenta-se para a malha 6, 1505533 nós, os valores o tempo de CPU e o número de iterações, correspondente ao pré-condicionador de Gauss-Seidel, para valores de períodos de onda igual a 4, 3, 2 e 1 s. Nesta tabela, encontra-se indicado o número médio e mínimo de pontos por comprimento de onda, que caracteriza a malha em estudo.

Tabela 6. Vila do Porto. Tempo de CPU e número de iterações obtidos com EpE_CG e com o pré-condicionador de Gauss-Seidel, para T= 4, 3, 2, 1 e 0.5 s.

Malha	NNos/L (médio)	NNos/L (min)	N. Iter	CPU (s)
4	29	15	1339	375
3	16	8	605	172
2	7	3	2576	726
1	1	-	-	-

Da tabela anterior, é necessário garantir um número mínimo de pontos por comprimento de onda superior a 3, em todo o domínio de cálculo, para haver convergência do método iterativo com o pré-condicionador de Gauss-Seidel. O número médio de pontos por comprimento de onda no domínio de cálculo neste caso é de 7. Recorde-se que para efeitos de precisão dos resultados aquele número deve ser no mínimo, superior a 8.

5. CONCLUSÕES

Nesta comunicação, descreveu-se o modelo EpE_CG para estudos de agitação em zonas portuárias e abrigadas. O modelo EpE_CG baseia-se numa formulação elemento por elemento que utilizando o método dos elementos finitos resolve a equação de declive suave. Para a solução do sistema de equações, é utilizado o método iterativo dos gradientes conjugados associado a três pré-condicionadores diferentes: o diagonal, o de factorização incompleta e o de Gauss-Seidel. O modelo foi aplicado no estudo da propagação de ondas monocromáticas nas zonas marítimas adjacentes ao porto de Sines e ao porto de Vila do Porto, Santa Maria, Açores.

Relativamente ao desempenho do modelo, verifica-se que:

- O método iterativo (EpE_CG) com uma factorização de Gauss-Seidel é mais rápido do que o método directo em *skyline*, do que o método iterativo com o pré-condicionador diagonal e, em geral do que o método iterativo com pré-condicionador de factorização incompleta. Apenas nas malhas, correspondentes ao caso de Sines, com um número inferior a 500 000 nós, o pré-condicionador de Gauss-Seidel apresentou valores de tempo de CPU superiores ao de factorização incompleta;
- A memória necessária ao método iterativo com factorização de Gauss-Seidel é da mesma ordem de grandeza que o de pré-condicionamento diagonal e substancialmente

- inferior aos restantes métodos. Deve-se notar que o pré-condicionamento diagonal também pode ser implementado na estrutura CSR em vez de EpE o que traz uma ligeira vantagem em termos de memória e tempo de cálculo;
- O método iterativo com factorização incompleta usa substancialmente menos memória do que o directo em *skyline* e é particularmente interessante quando se consegue evitar o uso excessivo de memória virtual. O valor do patamar deve variar entre 3×10^{-4} e 4×10^{-4} .
 - Foram resolvidos problemas com até cerca de 1500000 incógnitas que se podem considerar de uma dimensão apreciável para os computadores usados.
 - Verificou-se que, com o método directo em *skyline*, foi possível pela primeira vez com este modelo, obter soluções para malhas com um número de nós de cerca de 700000 pontos, graças à maior capacidade do computador utilizado. Apesar da diferença significativa de tempos, o método directo ainda pode servir para referência e validação de novos métodos iterativos;
 - Nos testes efectuados em baixa resolução, a convergência é interessante desde que se consiga reter em memória um número de coeficientes suficiente durante a factorização incompleta;
 - Os pré-condicionamentos diagonal e de Gauss Seidel são os únicos métodos que podem dar resposta quando os problemas são muito grandes, pois são os que necessitam menos memória. Além disso, não requerem a renumeração dos nós;
 - No caso do pré-condicionamento de Gauss Seidel deve garantir-se um número mínimo de pontos por comprimento de onda de 7-8, em geral.
 - Neste trabalho, a geração de malhas foi feita por refinamento local progressivo, alternado com *smoothing* de Laplace, sendo a densidade local final imposta pelo número mínimo de pontos por comprimento de onda. Houve ainda a necessidade de usar algoritmos para a renumeração dos nós da malha, tanto para o método directo como para o método iterativo pré-condicionado pela factorização incompleta.

Do exposto conclui-se que o pré-condicionador de Gauss-Seidel é o mais eficaz pois requer o menor tempo de CPU (face aos restantes métodos e pré-condicionadores) e a memória necessária é sensivelmente a mesma do método diagonal.

As experiências realizadas sugerem a aplicação do pré-condicionador de factorização de Gauss-Seidel a problemas de dimensão superior. Por outro lado, a pesquisa de pré-condicionadores capazes de atingir uma eficiência *multigrid* deve continuar, nomeadamente para acrescentar termos que anulem as componentes de erro de maior escala.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à técnica Branca Branco pela colaboração prestada na preparação e revisão do texto. Agradecem também o financiamento da FCT através dos projectos POCTI/CTA/48065/2002 e POCTI/EME/47576/2002. Este trabalho insere-se no âmbito do convénio entre o LNEC e a FURG.

REFERÊNCIAS

- [1] BARRET R.; Berry M, Chan T.F., Demmel J., Donato J., Dongarra J., Eijkhout V., R. Pozo, C. Romine, H. van der Vorst, Templates for the Solution of Linear Systems, Building Blocks for Iterative Methods, SIAM, Philadelphia, PA (1994).
- [2] BERKHOFF J.C.W., *Computation of combined refraction-diffraction*, Proceedings of the 13th International Conference Coastal Engineering, 2, 471-490 (1972).
- [3] FERNANDES J.L.M. e Fortes C.J.E.M, Um método directo usando o armazenamento CSR para as equações matriciais simétricas do Método dos Elementos Finitos,

- Relatório 180/99 – NPP, LNEC, Lisboa, Julho (1999).
- [4] FORTES C.J.E.M, Fernandes J.L.M., Pinheiro L, *Análise do comportamento do modelo de propagação de ondas EpE_CG em grandes áreas costeiras: Barra do Ancão e Porto de Sines*. Comunicação apresentada ao “Congresso de Metodos Numericos en Ingenieria 2005”, Granada, Espanha, 4 a 7 de Julho, (2005).
- [5] FORTES C.J.E.M., Fernandes J.L.M., *Estudo comparativo de diferentes métodos de resolução de sistemas de equações em estudos de propagação de ondas em zonas costeiras*. Comunicação apresentada ao CMCE2004 - Métodos computacionais em engenharia, APMTAC, Lisboa, 31 de Maio a 2 de Junho, (2004).
- [6] FORTES, C.J., *Modelação Matemática da Refracção e Difraccção Combinadas de Ondas Marítimas, Análise pelo Método dos Elementos Finitos*, Msc Thesis, IST 1993.
- [7] HESTENES M.R. e Stiefel E., Methods of conjugate gradients for solving linear systems, *J. of Research of the National Bureau of Standards*, 49, 409-436 (1952).
- [8] HUGHES T.J.R., Ferencz R.M. e Hallquist J.O., Large Scale Vectorized Implicit Calculations in Solid Mechanics on a Cray X-MP/48 Utilizing EBE Preconditioned Conjugate Gradients, *Comp. Meth. Applied Mech. Engineering*, 61, 215-248 (1987).
- [9] KECHROUD R., A. Soulaïmani e Y. Saad, Preconditioning Techniques for the Solution of the Helmholtz Equation by the Finite Element Method, Rep. UMSI-2003-40.
- [10] LO, S.H., A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains, *IJNME*, Vol. 21, pp1403-1426, 1985.
- [11] LOHNER, R. (1996) "Progress in Grid Generation via the Advancing Front Technique", *Engineering with Computers*, vol 12, pp.186-210.
- [12] LÖHNER, R. e Parikh, P., *Three-Dimensional Grid Generation by the Advancing Front Method*, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 8, 1988, pp. 1135-1149.
- [13] MACEDO, M.A.; ALQUATI, E.L.G.; VAZ DOS SANTOS, A.C.O, 2001. Solução iterativa numa formulação elemento por elemento dos estados de agitação e ressonância em portos. XIV Simpósio brasileiro de Recursos Hídricos, Aracaju, SE.
- [14] PERAIRE, J.; Peiro, J.; Morgan, K. (1987) Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations. *J. Comp. Phys.*, 72, 449-466.
- [15] PINHEIRO L. V., Fernandes J.L.M., Fortes C.J.E.M., *Sobre um gerador de malhas de elementos finitos com densidade local condicionada à batimetria para modelos de propagação de ondas em zonas portuárias*. Comunicação a apresentar na “Conferência Nacional de Métodos Numéricos de Mecânica dos Fluidos e Termodinâmica”, FCT-UNL, 2006. Portugal,
- [16] PINHEIRO, L.; Fortes, C. J; Santos, J.; Neves, M.G.; Capitão, R.; Coli, A. B.– SOPRO. Caracterização da agitação marítima. Aplicações. 4^ª S J. Portuguesas de Engenharia Costeira e Portuária. Angra do Heroísmo, Outubro. 2005.
- [17] PINHEIRO, L.; Fortes, C.J.E.M.; Santos, J.A.; Neves, M.G, Capitão, R., Coli, A.B. SOPRO – Sistema Operacional de Previsão da Ondulação em Portos, 7^º Simpósio de Hidráulica e Recursos Hídricos dos Países de Língua Oficial Portuguesa, Évora, 30 de Maio a 2 de Junho de 2005.
- [18] VAZ DOS SANTOS M.A. Fernandes J.L.M., Fortes C.J.E.M e An efficient element mild-slope model for wave propagation studies in large coastal zones by using element-by-element formulation. *Bra. J. Mat. Sci. Eng.*, Vol. 6 pp. 43-58. ISSN 1415 – 7004 (2004).